المتميز

فى
الرياضيات التطبيقية
الديناميكا

الجزء النظرى
و
حلول التمارين
الوحدة الأولى

$\text{ع} = \text{ع}_{.} + \text{جـ}\,\text{ن}$

$\text{ض} = \text{ك}\,\text{ء}\,\text{ل}$

$\text{ش} = \int_{\text{ف}_1}^{\text{ف}_2} \text{ق}\,\text{ء}\,\text{ف}$

$\text{ق} = \text{ك} \times \text{جـ}$

إعداد : أحمد الشنتورى

الصف الثالث الثانوى
القسم العلمى
شعبة الرياضيات

٢٠١٧ / ٢٠١٨

الوحدة الأولى .... الحركة فى خط مستقيم

١ – ١ تفاضل الدوال المتجهة

[أ] الحركة فى خط مستقيم :

إذا تحرك جسيم فى خط مستقيم يقال أنه يتحرك حركة خطية

[٢] موضع الجسيم :

عندما يتحرك جسيم حركة خطية فإنه عند أى لحظة زمنية ن سيشغل موضع معين على الخط المستقيم

و لتعيين الموضع $\overleftarrow{س}$ لجسيم متحرك عند أى لحظة زمنية ن نختار نقطة ثابتة " و " على الخط المستقيم كنقطة أصل و نحدد اتجاه موجب على طول الخط

فمثلاً :

فى الشكل المقابل :

عندما : يكون الجسيم عند الموضع (أ) على الخط المستقيم فإن : $\overleftarrow{س} = ٣ \overleftarrow{ى}$ حيث :

$\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{وأ}$ " اتجاه الحركة "

بينما :

فى الشكل المقابل :

إذا كان : الجسيم عند الموضع ب على الخط المستقيم فإن : $\overleftarrow{س} = -٤ \overleftarrow{ى}$

لاحظ :

موضع الجسيم كمية متجهة ، و يمكن التعبير عنه كدالة فى الزمن ن أى أن : $\overleftarrow{س} = د (ن)$

و يقاس معيار $\overleftarrow{س}$ فى النظام الدولى للوحدات بالمتر

[٣] متجه الازاحة :

تعرف ازاحة الجسيم $\overleftarrow{ف}$ بأنها التغير فى متجه موضعه

فى الشكل المقابل :

إذا تحرك الجسيم من الموضع (أ) إلى الموضع (أ/) على الخط المستقيم فإن :

الازاحة $\overleftarrow{ف} = \Delta \overleftarrow{س}$ حيث : $\Delta \overleftarrow{س} = \overleftarrow{س}/ - \overleftarrow{س}$

فى هذه الحالة $\Delta \overleftarrow{س}$ تكون موجبة حيث أن موضع الجسيم النهائى (أ/) على يمين موضع الجسيم الابتدائى (أ)

أما إذا كان موضع الجسيم النهائى على يسار موضع الجسيم الابتدائى فإن $\Delta \overleftarrow{س}$ تكون سالبة

ملاحظات :

(١) ازاحة الجسيم $\overleftarrow{ف}$ كمية متجهة و يمكن التعبير عنه كدالة فى الزمن ن أى أن : $\overleftarrow{ف} = د (ن)$

(٢) معيار الازاحة هو طول القطعة المستقيمة الموجهة من نقطة البداية إلى نقطة النهاية بصرف النظر عن المسار الذى تحرك فيه الجسيم

(٣) المسافة كمية قياسية موجبة تمثل المسار الكلى المقطوع بواسطة الجسيم

(٤) معيار الازاحة $\leq$ المسافة الكلية

(٥) يمكن استخدام الرموز س ، ف للتعبير عن القياس الجبرى لمتجه الموضع $\overleftarrow{س}$ و لمتجه الازاحة $\overleftarrow{ف}$ على الترتيب

(٦) إذا كان موضع الجسيم عند بداية قياس الزمن عند نقطة الأصل فإن : $\overleftarrow{س}. = \overleftarrow{٠}$ و يكون : $\overleftarrow{س} = \overleftarrow{ف}$

(٧) إذا عاد الجسيم إلى موضعه الابتدائى فإن : ف = صفر

[٤] متجه السرعة :

إذا كانت : $\overleftarrow{\text{ف}} = \Delta\,\overleftarrow{\text{س}}$ هى ازاحة الجسيم خلال فترة زمنية $\Delta\text{ن}$

فإن : متجه السرعة المتوسطة $\overleftarrow{\text{ع}}_{\text{م}}$ يساوى خارج قسمة متجه الازاحة على الزمن أى أن :

$$\overleftarrow{\text{ع}}_{\text{م}} = \frac{\Delta\,\overleftarrow{\text{س}}}{\Delta\text{ن}} = \frac{\overleftarrow{\text{س}}(\text{ن}+\Delta\text{ن}) - \overleftarrow{\text{س}}(\text{ن})}{\Delta\text{ن}}$$

و يعرف متجه السرعة اللحظية $\overleftarrow{\text{ع}}$ عند أى لحظة زمنية بالعلاقة :

$$\overleftarrow{\text{ع}} = \text{نهـا}_{\Delta\text{ن}\to 0}\frac{\Delta\,\overleftarrow{\text{س}}}{\Delta\text{ن}} = \text{نهـا}_{\Delta\text{ن}\to 0}\frac{\overleftarrow{\text{س}}(\text{ن}+\Delta\text{ن}) - \overleftarrow{\text{س}}(\text{ن})}{\Delta\text{ن}}$$

و من تعريف المشتقة يستنتج أن : $\overleftarrow{\text{ع}} = \frac{\text{ء}\overleftarrow{\text{س}}}{\text{ءن}}$

(ميل المماس لمنحنى الموضع – الزمن) ، و حيث أن : $\overleftarrow{\text{س}}_{.}$ متجهاً ثابتاً فإن : متجه السرعة يساوى معدل تغير الازاحة بالنسبة للزمن

أى أن : $\overleftarrow{\text{ع}} = \frac{\text{ء}\overleftarrow{\text{ف}}}{\text{ءن}}$ (ميل المماس لمنحنى الازاحة – الزمن)

و يحسب معيار متجه السرعة بوحدة م / ث فى النظام الدولى للوحدات

ملاحظة :

يمكن استخدام الرمز ع للتعبير عن القياس الجبرى لمتجه السرعة $\overleftarrow{\text{ع}}$

و تكون : $\text{ع}_{\text{م}} = \frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلى}}$ ، $\overleftarrow{\text{ع}}_{\text{م}} = \frac{\text{الازاحة الكلية}}{\text{الزمن الكلى}}\,\overleftarrow{\text{ى}}$

حيث : $\overleftarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة فى اتجاه الحركة

[٥] السرعة :

إذا كان : $\overleftarrow{\text{ع}}(\text{ن})$ متجه سرعة جسيم يتحرك فى خط مستقيم فإن : السرعة هى الكمية القياسية التى تعبر عن معيار متجه السرعة

أى أن : السرعة = $\|\overleftarrow{\text{ع}}\| = \left\|\frac{\text{ء}\overleftarrow{\text{س}}}{\text{ءن}}\right\| = \left\|\frac{\text{ء}\overleftarrow{\text{ف}}}{\text{ءن}}\right\|$

و إذا كان : ع هو القياس الجبرى لمتجه السرعة ، س هو القياس الجبرى لمتجه الموضع فإن :

السرعة = $|\text{ع}| = \left|\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}\right| = \left|\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}\right|$

أى أن : $\text{ع} = \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$

ملاحظة :

إذا وصل الجسيم إلى أقصى بعد (أقصى ارتفاع) فإن : ع = صفر

[٦] العجلة :

إذا كان : $\Delta\overleftarrow{\text{ع}}$ تعبر عن التغير فى متجه السرعة خلال فترة زمنية $\Delta\text{ن}$ فإن : العجلة المتوسطة $\overleftarrow{\text{ح}}_{\text{م}}$ تعطى بالعلاقة :

$\overleftarrow{\text{ح}}_{\text{م}} = \frac{\text{ء}\overleftarrow{\text{ع}}}{\text{ءن}}$ أى أن : $\overleftarrow{\text{ح}}_{\text{م}} = \frac{\overleftarrow{\text{ع}}(\text{ن}+\Delta\text{ن}) - \overleftarrow{\text{ع}}(\text{ن})}{\Delta\text{ن}}$

و تعرف العجلة اللحظية $\overleftarrow{\text{ح}}$ (العجلة اختصاراً) عند أى لحظة ن بالعلاقة : $\overleftarrow{\text{ح}} = \text{نهـا}_{\Delta\text{ن}\to 0}\frac{\overleftarrow{\text{ع}}(\text{ن}+\Delta\text{ن}) - \overleftarrow{\text{ع}}(\text{ن})}{\Delta\text{ن}}$

و من تعريف المشتقة يستنتج أن : $\overleftarrow{\text{ح}} = \frac{\text{ء}\overleftarrow{\text{ع}}}{\text{ءن}}$

أى أن : العجلة هى معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن (ميل المماس لمنحنى السرعة – الزمن)

و يحسب معيار متجه العجلة بوحدة م / ث / ث (م / ث²) فى النظام الدولى للوحدات

مما سبق نجد أن : إذا كانت $\overleftarrow{س}$ (ن) موضع الجسيم و هى دالة فى الزمن ن فإن : متجه السرعة $\overleftarrow{ع} = \frac{ء\overleftarrow{س}}{ءن}$ و من ذلك يمكن استنتاج أن : العجلة $\overleftarrow{حـ} = \frac{ء\overleftarrow{ع}}{ءن} = \frac{ء}{ءن}\left(\frac{ء\overleftarrow{س}}{ءن}\right) = \frac{ء^2\overleftarrow{س}}{ءن^2}$

أى : العجلة $\overleftarrow{حـ}$ = المشتقة الأولى لمتجه السرعة
= مشتقة المشتقة الأولى لمتجه الموضع
= المشتقة الثانية لمتجه الموضع

تنبيه :
عند الاشارة إلى القياسات الجبرية لكل من متجهات الموضع و السرعة و العجلة تستخدم الرموز س ، ع ، حـ على الترتيب

ملاحظات :

(١) إذا تحرك الجسيم بأقصى سرعة أو سرعة منتظمة (ثابتة)
فإن : حـ = صفر

(٢) درجة س (ن) = درجة ف (ن) ،
درجة ع (ن) = درجة ف (ن) – ١ ،
درجة حـ (ن) = درجة ع (ن) – ١
= درجة ف (ن) – ٢

القياس الجبرى لمتجه السرعة و العجلة :

(١) إذا كانت : حـ > ٠ فإن :
ع تتزايد و العكس صحيح
أى أن إذا كانت : ع تتزايد
فإن : حـ > ٠ " موجبة "
و هذا يعنى أن : الجسيم يتحرك بشكل أسرع فى الاتجاه الموجب شكل (١)
و أن : الجسيم يتحرك ببطء أكثر فى الاتجاه السالب شكل (٢)
فى الحالتين : Δ ع > ٠ .

(٢) إذا كانت : حـ < ٠ فإن :
ع تتناقص و العكس صحيح
أى أن إذا كانت :
ع تتناقص فإن :
حـ < ٠ " سالبة "
و هذا يعنى أن : الجسيم يتحرك ببطء أكثر فى الاتجاه الموجب شكل (٣)
و أن : الجسيم يتحرك بشكل أسرع فى الاتجاه السالب شكل (٤)
فى الحالتين : Δ ع < ٠ .

(٣) فى كل من الشكلين (١) ، (٤) يقال أن : الجسيم يتحرك أسرع (يتسارع) ، بينما فى كل من الشكلين (٢) ، (٣) يقال أن : الجسيم يتحرك بتقصير (يتباطأ)

أى أن :
الجسيم يتحرك حركة متسارعة إذا كان : ع⃖ ، حـ⃖ لهما نفس الاتجاه (ع حـ > ٠)
و يتحرك حركة تقصيرية إذا كان : ع⃖ ، حـ⃖ متضادين فى الاتجاه (ع حـ < ٠)

طرق تعيين فترات الحركة المتسارعة و فترات الحركة التقصيرية :

(١) بيانياً :
كما سيأتى فى دراسة كل من :
(منحنى الازاحة – الزمن) ،
و مثله تماماً (منحنى السرعة – الزمن) ،
(منحنى العجلة – الزمن)

(٢) جبرياً :

أ) دراسة إشارة كل : ع ، حـ كدوال فى ن
كما سبق فى دراسة إشارة الدالة (الصف الأول الثانوى)
أو بالتعويض عن قيم لـ ن فى كل فترة تتغير فيها الحركة
ثم تحديد إشارة : ع حـ

٢) حل المتباينتين :
ع حـ > ٠ للحركة المتسارعة
" الحركة المتسارعة تعنى :
الجسيم يتحرك بسرعة تزايدية إلى الأمام
أو بسرعة تناقصية إلى الخلف "
ع حـ < ٠ للحركة التقصيرية
" الحركة التقصيرية تعنى :
الجسيم يتحرك بسرعة تزايدية إلى الخلف
أو بسرعة تناقصية إلى الأمام "

استنتاج العجلة عندما يكون متجه السرعة دالة فى الموضع :
إذا كانت : ع = د (س) ، س = د (ن) فإن :
باستخدام قاعدة السلسلة نستنتج : $\frac{ء ع}{ء ن} = \frac{ء ع}{ء س} \times \frac{ء س}{ء ن}$
أى أن : حـ = ع × $\frac{ء ع}{ء س}$
و هى صورة أخرى للعجلة يمكن استخدامها عندما يكون متجه السرعة ع⃖ دالة فى الموضع س⃖

أحمد الشتوى

دراسة الأشكال البيانية لحركة جسم :

أولاً : دراسة سلوك الدالة :

لدراسة سلوك الدالة : ف = $ن^{٣}$ − ٦ $ن^{٢}$ + ٩ ن

نوجد : ع = $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$ = ٣ $ن^{٢}$ − ١٢ ن + ٩ = ٣ (ن − ١) (ن − ٣)

بوضع : ع = ٠ يكون : ن = ١ ، ن = ٣

بدراسة إشارة ع كما بالشكل التالى نجد :

ن	٠	١		٣	∞
إشارة ع = د'(ن)	+ +	٠	− −	٠	+ +
سلوك ف = د(ن)	تزايدية		تناقصية		تزايدية
ف = د(ن)		٤		٠	
		قيمة عظمى محلية		قيمة صغرى محلية	

(١) تزايد و تناقص الدالة :

[١] الدالة ف = د(ن) تزايدية فى] ٠ ، ١ [،] ٣ ، ∞ [

[٢] الدالة ف = د(ن) تناقصية فى] ١ ، ٣ [

(٢) نقط القيم العظمى و الصغرى المحلية :

[١] للدالة ف = د(ن) نقطة قيمة عظمى محلية عند : ن = ١

حيث عند : ن < ١ تكون : الدالة تزايدية

، عند : ن > ١ تكون : الدالة تناقصية

[٢] للدالة ف = د(ن) نقطة قيمة صغرى محلية عند : ن = ٣

حيث عند : ن < ٣ تكون : الدالة تناقصية

، عند : ن > ٣ تكون : الدالة تزايدية

نوجد : جـ = $\frac{\text{د}^{٢}\text{ف}}{\text{دن}^{٢}}$ = $\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ = ٦ ن − ١٢ = ٦ (ن − ٢)

بوضع : جـ = ٠ يكون : ن = ٢

بدراسة إشارة جـ كما بالشكل التالى نجد :

ن	٠	٢	∞
إشارة جـ = د''(ن)	− − − −	٠	+ + + +
تحدب ف = د(ن)	لأعلى		لأسفل
ف = د(ن)		٢	
		نقطة إنقلاب	

(٣) تحدب منحنى الدالة و نقط الانقلاب :

[١] فى] ٠ ، ٢ [: يكون منحنى الدالة ف(ن) محدباً لأعلى

لأن : المشتقة الثانية للدالة ف(ن) سالبة أى : جـ < ٠

[٢] فى] ٢ ، ∞ [: يكون منحنى الدالة ف(ن) محدباً لأسفل

لأن : المشتقة الثانية للدالة ف(ن) موجبة أى : جـ > ٠

[٣] عند : ن = ٢ تنعدم المشتقة الثانية للدالة ف(ن) موجبة

أى : جـ = ٠ ، يتغير تحدب المنحنى

لذا تسمى النقطة (٢ ، ٢) نقطة انقلاب

طريقة أخرى لتحديد نقط القيم العظمى و الصغرى المحلية :

نلاحظ عند : ن = ١ ، ن = ٣

تنعدم المشتقة الأولى للدالة ف(ن) أى : $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$ = ٠ و بالتالى : ع = ٠

" ميل المماس = ٠ (المماس أفقى) " كما يكون :

[١] عند : ن = ١ تكون المشتقة الثانية للدالة ف(ن) سالبة أى :

$\frac{\text{د}^{٢}\text{ف}}{\text{دن}^{٢}}$ < ٠ و بالتالى : جـ < ٠

لذا تسمى النقطة (١ ، ٤) نقطة قيمة عظمى محلية

[٢] عند : ن = ٣ تكون المشتقة الثانية للدالة ف(ن) موجبة أى :

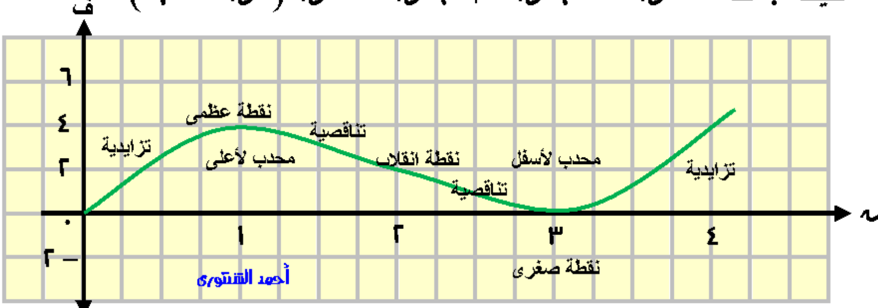
$\frac{د^2 ف}{د ن^2} > ٠$ و بالتالى : حـ > ٠ .

لذا تسمى النقطة (٣ ، ٠) نقطة قيمة صغرى محلية

ثانياً : التمثيل البيانى لمنحنيات دالة ما و المشتقتين الأولى و الثانية لهذه الدالة :

١) المنحنى التالى يمثل : (منحنى الازاحة – الزمن)

حيث : ف = ن^3 – ٦ ن^2 + ٩ ن = ن (ن – ٣)^2



و من دراسة سلوك الدالة يوضح الشكل كل من :

(١) تزايد و تناقص الدالة :

[١] الدالة ف = د(ن) تزايدية فى] ٠ ، ١ [،] ٣ ، ∞ [

لاحظ : ميل المماس فى كل فترة موجب حيث :
عند رسم المماس عند كل نقطة تنتمى للفترة نجد أنه يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور ن و بالتالى فإن :
المشتقة الأولى للدالة ف(ن) تكون موجبة أى أن : ع > ٠ .

[٢] الدالة ف = د(ن) تناقصية فى] ١ ، ٣ [

لاحظ : ميل المماس فى كل فترة سالب حيث :
عند رسم المماس عند كل نقطة تنتمى للفترة نجد أنه يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور ن و بالتالى فإن :
المشتقة الأولى للدالة ف(ن) تكون سالبة أى أن : ع < ٠ .

(٢) نقط القيم العظمى و الصغرى المحلية :

[١] للدالة ف = د(ن) نقطة قيمة عظمى محلية عند : ن = ١

[٢] للدالة ف = د(ن) نقطة قيمة صغرى محلية عند : ن = ٣

(٣) تحدب منحنى الدالة و نقط الانقلاب :

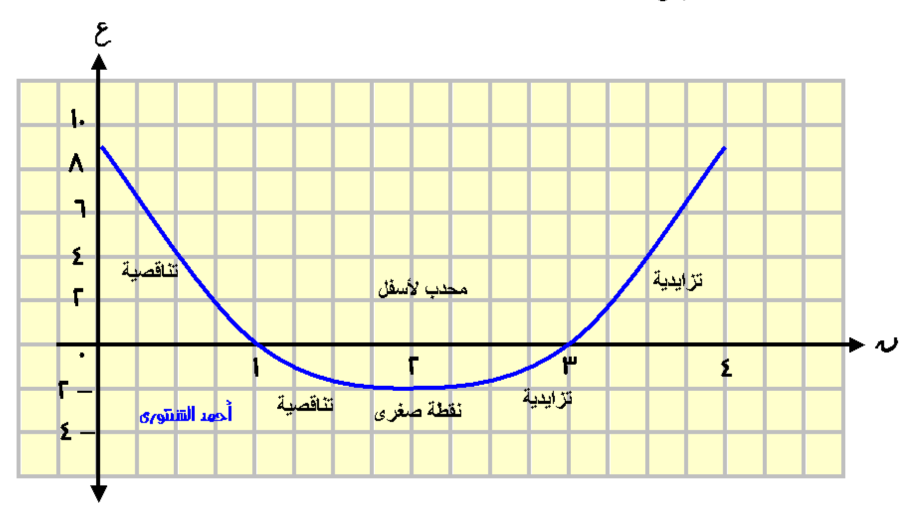
[١] فى] ٠ ، ٢ [: يكون منحنى الدالة ف(ن) محدباً لأعلى

[٢] فى] ٢ ، ∞ [: يكون منحنى الدالة ف(ن) محدباً لأسفل

[٣] النقطة (٢ ، ٢) نقطة انقلاب

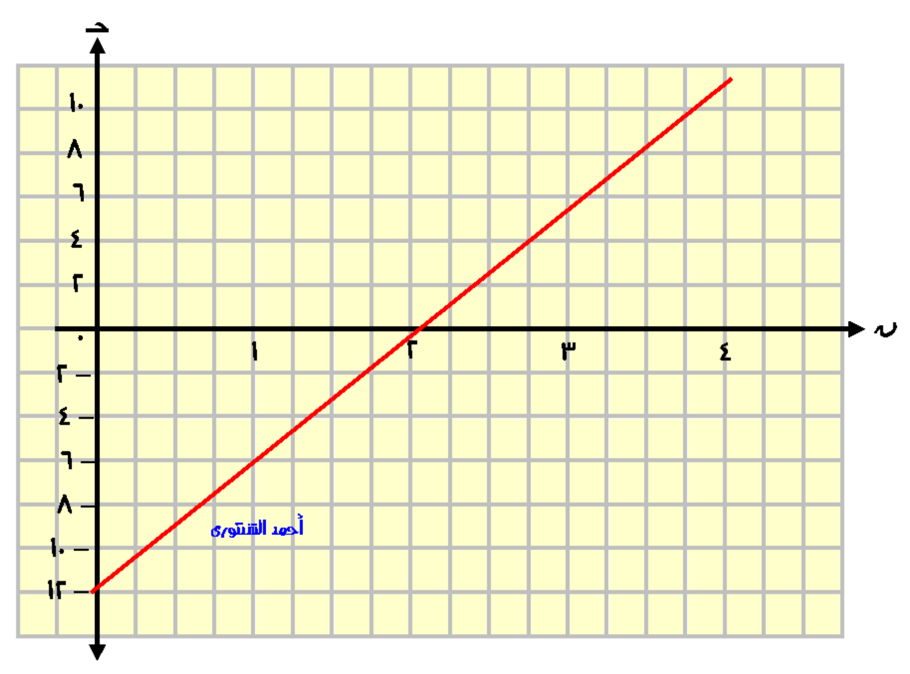
٢) المنحنى التالى يمثل : (منحنى السرعة – الزمن)

حيث : ع = $\frac{د ف}{د ن}$ = ٣ ن^2 – ١٢ ن + ٩ = ٣ (ن – ١) (ن – ٣)



٣) المنحنى التالى يمثل : (منحنى العجلة – الزمن)

حيث : حـ = $\frac{د^2 ف}{د ن^2}$ = $\frac{د ع}{د ن}$ = ٦ ن – ١٢ = ٦ (ن – ٢)



ملاحظات :

(١) من دراسة سلوك الدالة يمكن دراسة و تمثيل المشتقة الأولى للدالة بيانياً أو العكس بمعنى من المشتقة الأولى للدالة يمكن دراسة و تمثيل الدالة الأصلية بيانياً

(٢) الازاحة عند لحظة زمنية ن هى :
الاحداثى الرأسى (محور ف) للنقطة التى احداثيها الأفقى ن

(٣) الازاحة خلال فترة ما هى المساحة المحصورة بين منحنى (السرعة – الزمن) و محور (ن)

(٤) المسافة هى مجموع القيم المطلقة للازاحات المختلفة عند كل تغير فى اتجاه الحركة

(٥) المسافة خلال فترة ما هى مجموع القيم المطلقة للازاحات المختلفة خلال هذه الفترة

(٦) من منحنى الدالة : ف = د (ن) نجد :

[١] إذا كان المنحنى متزايد فإن الحركة تكون فى الاتجاه الموجب
و يكون ميل المماس للمنحنى موجب " ع > . "
" الجسم يتحرك للأمام أو لأعلى "

[٢] إذا كان المنحنى متناقص فإن الحركة تكون فى الاتجاه السالب
و يكون ميل المماس للمنحنى سالب " ع < . "
" الجسيم يتحرك للخلف أو لأسفل "

[٣] السرعة تنعدم " ع = . " عند نقط القيم العظمى أو الصغرى للمنحنى
و عندها يتغير اتجاه الحركة
لاحظ : ميل منحنى (الازاحة – الزمن) أو (الموضع – الزمن)
عند لحظة زمنية ما يساوى سرعة الجسم عند نفس اللحظة

[٤] العجلة تنعدم " حـ = . " عند نقط الانقلاب للمنحنى "

(٧) من منحنى الدالة : ع = د (ن) نجد :

[١] إذا كان المنحنى يقع أعلى محور (ن) فإن السرعة تكون موجبة
أى أن : الجسم يتحرك فى نفس اتجاه الحركة

[٢] إذا كان المنحنى يقع أسفل محور (ن) فإن السرعة تكون سالبة
أى أن : الجسم يتحرك فى عكس اتجاه الحركة

[٣] السرعة تنعدم " ع = . " عند نقط التقاطع مع محور (ن)

[٤] إذا كان المنحنى متزايد فإن ميل المماس يكون موجب
و بالتالى تكون العجلة موجبة " حـ > . "

[٥] إذا كان المنحنى متناقص فإن ميل المماس يكون سالب
و بالتالى تكون العجلة سالبة " حـ < . "

[٦] العجلة تنعدم " حـ = . " عند نقط القيم العظمى و الصغرى للمنحنى "
لاحظ : ميل منحنى (السرعة – الزمن) = العجلة

[٧] السرعة تتزايد إذا كان المنحنى يقع أعلى محور (ن) و ميله موجب
أو أسفل محور (ن) و ميله سالب و تكون : ع حـ > .
أى أن : حركة الجسم متسارعة

أحمد الشتوى

[٨] السرعة تباطأ إذا كان المنحنى يقع أعلى محور (ن) و ميله سالب
أو أسفل محور (ن) و ميله موجب و تكون : ع حـ < ٠ .
أى أن : حركة الجسم تقصيرية

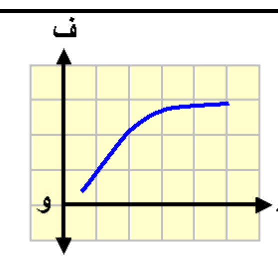
(٨) من منحنى الدالة : حـ = د (ن) نجد :
[١] إذا كان المنحنى يقع أعلى محور (ن) فإن العجلة تكون موجبة
[٢] إذا كان المنحنى يقع أسفل محور (ن) فإن العجلة تكون سالبة
[٣] العجلة تنعدم عند نقط تقاطع المنحنى مع محور (ن)

(٩) الجسم يتحرك على خط مستقيم
و لا يتحرك على من المنحنيات السابقة

دراسة بعض الأشكال لحركة جسم من خلال (منحنى الازاحة – الزمن) :

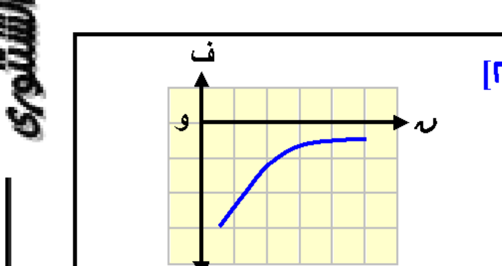
(١) فى الشكلين التاليين :

[١]



∵ المنحنى يقع أعلى محور ن
∴ ف < ٠ .
∵ المنحنى متزايد ∴ الميل موجب
∴ ع < ٠ . ∴ الجسم يتحرك فى نفس اتجاه الحركة
، ∵ ف ع < ٠ . ∴ الجسم يبتعد عن نقطة بدء الحركة
، ∵ المنحنى محدب لأعلى
∴ حـ < ٠ . ∴ ع حـ < ٠ .
∴ الحركة تقصيرية

[٢]

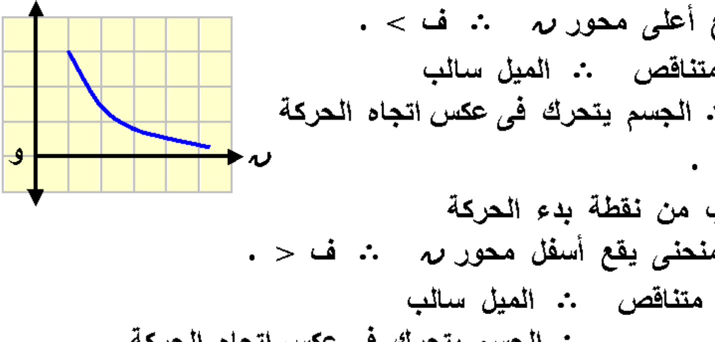


∵ المنحنى يقع أسفل محور ن
∴ ف < ٠ .
∵ المنحنى متزايد ∴ الميل موجب
∴ ع < ٠ . ∴ الجسم يتحرك فى نفس اتجاه الحركة
، ∵ ف ع < ٠ . ∴ الجسم يقترب من نقطة بدء الحركة
، ∵ المنحنى محدب لأعلى
∴ حـ < ٠ . ∴ ع حـ < ٠ .
∴ الحركة تقصيرية

(٢) [١] فى الشكل المقابل :
∵ المنحنى يقع أعلى محور ن ∴ ف < ٠ .
، ∵ المنحنى متناقص ∴ الميل سالب
∴ ع < ٠ . ∴ الجسم يتحرك فى عكس اتجاه الحركة
، ∵ ف ع < ٠ .
∴ الجسم يقترب من نقطة بدء الحركة

[٢] إذا كان : المنحنى يقع أسفل محور ن ∴ ف < ٠ .
، ∵ المنحنى متناقص ∴ الميل سالب
∴ ع < ٠ . ∴ الجسم يتحرك فى عكس اتجاه الحركة
، ∵ ف ع < ٠ . ∴ الجسم يبتعد عن نقطة بدء الحركة
، و فى كلا الحالتين : ∵ المنحنى محدب لأعلى ∴ حـ < ٠ .
∴ ع حـ < ٠ . ∴ الحركة متسارعة

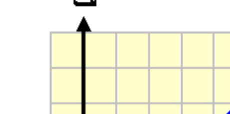
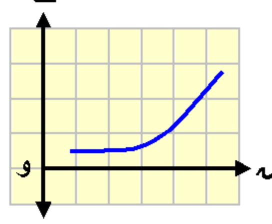
(٣) [١] فى الشكل المقابل :



∵ المنحنى يقع أعلى محور ن ∴ ف < ٠ .
، ∵ المنحنى متناقص ∴ الميل سالب
∴ ع < ٠ . ∴ الجسم يتحرك فى عكس اتجاه الحركة
، ∵ ف ع < ٠ .
∴ الجسم يقترب من نقطة بدء الحركة

[٢] إذا كان : المنحنى يقع أسفل محور ن ∴ ف < ٠ .
، ∵ المنحنى متناقص ∴ الميل سالب
∴ ع < ٠ . ∴ الجسم يتحرك فى عكس اتجاه الحركة
، ∵ ف ع < ٠ . ∴ الجسم يبتعد عن نقطة بدء الحركة
، و فى كلا الحالتين : ∵ المنحنى محدب لأسفل ∴ حـ < ٠ .
∴ ع حـ < ٠ . ∴ الحركة تقصيرية

(٤) [أ] فى الشكل المقابل :

∵ المنحنى يقع أعلى محور ن ∴ ف > ٠

∵ المنحنى متزايد ∴ الميل موجب

∴ ع > ٠ ∴ الجسم يتحرك فى نفس اتجاه الحركة

، ∵ ف ع > ٠

∴ الجسم يبتعد عن نقطة بدء الحركة

[ب] إذا كان : المنحنى يقع أسفل محور ن ∴ ف < ٠

، ∵ المنحنى متزايد ∴ الميل موجب

∴ ع > ٠ ∴ الجسم يتحرك فى نفس اتجاه الحركة

، ∵ ف ع < ٠ ∴ الجسم يقترب من نقطة بدء الحركة

، و فى كلا الحالتين : ∵ المنحنى محدب لأسفل ∴ حـ > ٠

∴ ع حـ > ٠ ∴ الحركة متسارعة

(٥) فى الشكل المقابل :

∵ المنحنى يمثل دالة ثابتة

∴ الميل = ٠

∴ ع = ٠

∴ الجسم متوقف

(٦) [أ] الشكل المقابل يمثل منحنى يقع أعلى محور ن ∴ ف > ٠

∵ المنحنى يمثل دالة خطية ∴ منحنى ع دالة ثابتة ∴ حـ = ٠

، ∵ المنحنى متزايد ∴ الميل > ٠ ∴ ع > ٠

∴ الجسيم يتحرك فى نفس اتجاه الحركة بسرعة منتظمة

، ∵ ف ع > ٠ ∴ الجسم يبتعد عن نقطة بدء الحركة

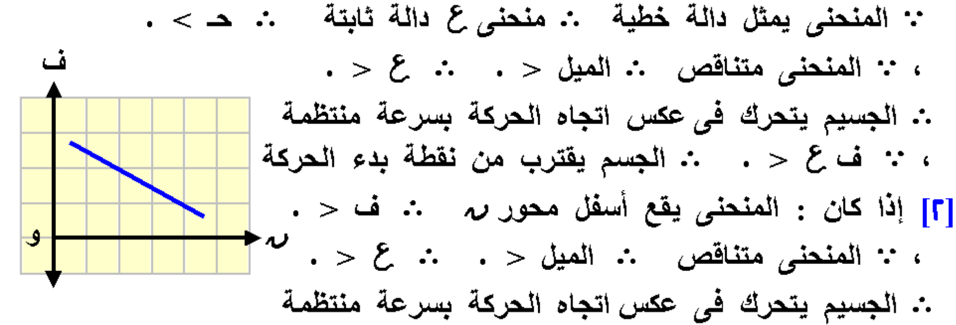
[ب] إذا كان : المنحنى يقع أسفل محور ن ∴ ف < ٠

، ∵ المنحنى متزايد ∴ الميل > ٠ ∴ ع > ٠

∴ الجسيم يتحرك فى نفس اتجاه الحركة بسرعة منتظمة

، ∵ ف ع < ٠ ∴ الجسم يقترب من نقطة بدء الحركة

(٧) [أ] الشكل المقابل يمثل منحنى يقع أعلى محور ن ∴ ف > ٠



∵ المنحنى يمثل دالة خطية ∴ منحنى ع دالة ثابتة ∴ حـ > ٠

، ∵ المنحنى متناقص ∴ الميل < ٠ ∴ ع < ٠

∴ الجسيم يتحرك فى عكس اتجاه الحركة بسرعة منتظمة

، ∵ ف ع < ٠ ∴ الجسم يقترب من نقطة بدء الحركة

[ب] إذا كان : المنحنى يقع أسفل محور ن ∴ ف < ٠

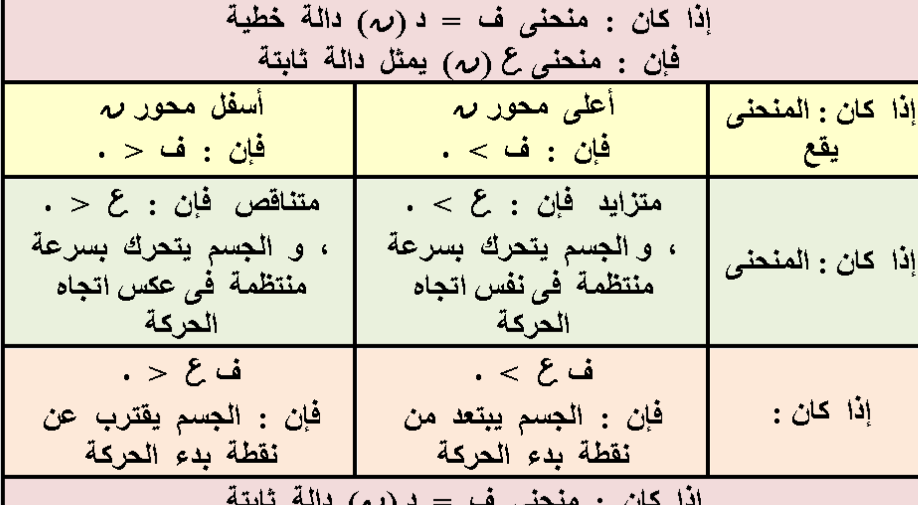
، ∵ المنحنى متناقص ∴ الميل < ٠ ∴ ع < ٠

∴ الجسيم يتحرك فى عكس اتجاه الحركة بسرعة منتظمة

، ∵ ف ع > ٠ ∴ الجسم يبتعد عن نقطة بدء الحركة

ملخص ما سبق بالجدول التالى :

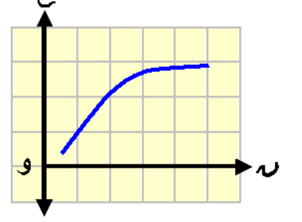
منحنى ف = د (ن) دالة تربيعية أو تكعيبية أو		
إذا كان : المنحنى يقع	أعلى محور ن فإن : ف > ٠	أسفل محور ن فإن : ف < ٠
إذا كان : المنحنى	متزايد فإن : ع > ٠ ، و الجسم يتحرك فى نفس اتجاه الحركة	متناقص فإن : ع < ٠ ، و الجسم يتحرك فى عكس اتجاه الحركة
إذا كان :	ف ع > ٠ فإن : الجسم يبتعد عن نقطة بدء الحركة	ف ع < ٠ فإن : الجسم يقترب من نقطة بدء الحركة
إذا كان : المنحنى	محدب لأسفل فإن : حـ > ٠	محدب لأعلى فإن : حـ < ٠
إذا كان :	ع حـ > ٠ فإن : الحركة متسارعة	ع حـ < ٠ فإن : الحركة تقصيرية

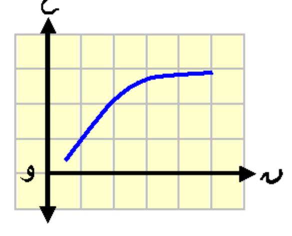


إذا كان : منحنى ف = د (ن) دالة خطية فإن : منحنى ع (ن) يمثل دالة ثابتة		
إذا كان : المنحنى يقع	أعلى محور ن فإن : ف > ٠ .	أسفل محور ن فإن : ف < ٠ .
إذا كان : المنحنى	متزايد فإن : ع > ٠ . ، و الجسم يتحرك بسرعة منتظمة فى نفس اتجاه الحركة	متناقص فإن : ع < ٠ . ، و الجسم يتحرك بسرعة منتظمة فى عكس اتجاه الحركة
إذا كان :	ف ع > ٠ . فإن : الجسم يبتعد من نقطة بدء الحركة	ف ع < ٠ . فإن : الجسم يقترب عن نقطة بدء الحركة
إذا كان : منحنى ف = د (ن) دالة ثابتة فإن : ع = ٠ . ∴ الجسم متوقف		

دراسة بعض الأشكال لحركة جسم من خلال (منحنى السرعة – الزمن) :

(١) [١] فى الشكل المقابل :





∵ المنحنى يقع أعلى محور ن ∴ ع > ٠ .

، ∵ المنحنى متزايد ∴ الميل موجب

∴ حـ > ٠ . ∴ ع حـ > ٠ .

∴ الحركة متسارعة

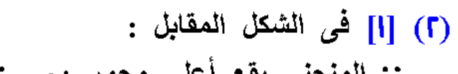
" لاحظ أن : مقدار السرعة يتزايد "

[٢] إذا كان : المنحنى يقع أسفل محور ن ∴ ع < ٠ .

، ∵ المنحنى متزايد ∴ الميل موجب ∴ حـ > ٠ .

∴ ع حـ < ٠ . ∴ الحركة تقصيرية

" لاحظ أن : مقدار السرعة يتناقص "



(٢) [١] فى الشكل المقابل :

∵ المنحنى يقع أعلى محور ن ∴ ع > ٠ .

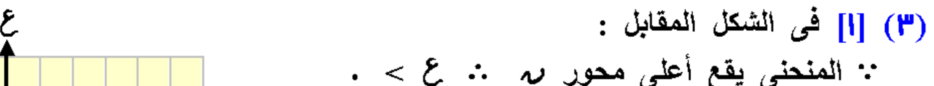
، ∵ المنحنى متناقص ∴ الميل سالب

∴ حـ < ٠ . ∴ ع حـ < ٠ .

∴ الحركة تقصيرية

" لاحظ أن : مقدار السرعة يتناقص "

(٣) [١] فى الشكل المقابل :



∵ المنحنى يقع أعلى محور ن ∴ ع > ٠ .

، ∵ المنحنى متناقص ∴ الميل سالب

∴ حـ < ٠ . ∴ ع حـ < ٠ .

∴ الحركة تقصيرية

" لاحظ أن : مقدار السرعة يتناقص "

[٢] إذا كان : المنحنى يقع أسفل محور ن ∴ ع < ٠ .

، ∵ المنحنى متناقص ∴ الميل سالب ∴ حـ < ٠ .

∴ ع حـ > ٠ . ∴ الحركة متسارعة

" لاحظ أن : مقدار السرعة يتزايد "

(٤) [١] فى الشكل المقابل :

∵ المنحنى يقع أعلى محور ن ∴ ع > ٠ .

، ∵ المنحنى متزايد ∴ الميل موجب

∴ حـ > ٠ . ∴ ع حـ > ٠ .

∴ الحركة متسارعة

" لاحظ أن : مقدار السرعة يتزايد "

[٢] إذا كان : المنحنى يقع أسفل محور ن ∴ ع < ٠ .

، ∵ المنحنى متزايد ∴ الميل مودب ∴ حـ > ٠ .

∴ ع حـ < ٠ . ∴ الحركة تقصيرية

" لاحظ أن : مقدار السرعة يتناقص "

(٥) [أ] فى الشكل المقابل :

∵ المنحنى يقع أعلى محور ن ∴ ع > ٠

، ∵ دالة المنحنى ثابتة ∴ الميل = ٠ ∴ جـ = ٠

∴ الجسم يتحرك بسرعة منتظمة (ثابتة)
فى نفس اتجاه الحركة

[ب] إذا كان : المنحنى يقع أسفل محور ن ∴ ع < ٠

∴ الجسم يتحرك بسرعة منتظمة (ثابتة) فى عكس اتجاه الحركة

(٧) فى الشكل المقابل :

∵ المنحنى يقع على محور ن

∴ ع = ٠

∴ الجسم متوقف

(٨) [أ] فى الشكل المقابل :

∵ المنحنى يقع أعلى محور ن ∴ ع > ٠

، ∵ المنحنى متزايد ∴ الميل موجب

∴ جـ > ٠ ∴ ع جـ > ٠

∴ الحركة متسارعة

" لاحظ أن : مقدار السرعة يتزايد "

[ب] إذا كان : المنحنى يقع أسفل محور ن ∴ ع < ٠

، ∵ المنحنى متزايد ∴ الميل موجب ∴ جـ > ٠

∴ ع جـ < ٠ ∴ الحركة تقصيرية

" لاحظ أن : مقدار السرعة يتناقص "

(٩) [أ] فى الشكل المقابل :

∵ المنحنى يقع أعلى محور ن ∴ ع > ٠

، ∵ المنحنى متناقص ∴ الميل سالب

∴ جـ < ٠ ∴ ع جـ < ٠

∴ الحركة تقصيرية

" لاحظ أن : مقدار السرعة يتناقص "

[ب] إذا كان : المنحنى يقع أسفل محور ن ∴ ع < ٠

، ∵ المنحنى متناقص ∴ الميل سالب

∴ جـ < ٠ ∴ ع جـ > ٠

∴ الحركة متسارعة

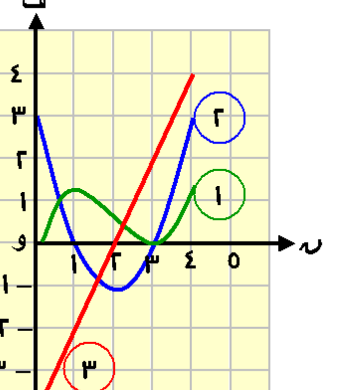
" لاحظ أن : مقدار السرعة يتزايد "

ملخص ما سبق بالجدول التالى :

منحنى ع = د (ن) دالة تربيعية أو تكعيبية أو		
إذا كان : المنحنى يقع	أعلى محور ن فإن : ع > ٠	أسفل محور ن فإن : ع < ٠
إذا كان : المنحنى	متزايد فإن : جـ > ٠	متناقص فإن : جـ < ٠
إذا كان :	ع جـ > ٠ فإن : الحركة متسارعة	ع جـ < ٠ فإن : الحركة تقصيرية

إذا كان : منحنى ع = د (ن) دالة خطية فإن : منحنى جـ (ن) يمثل دالة ثابتة		
إذا كان : المنحنى يقع	أعلى محور ن فإن : ع > ٠	أسفل محور ن فإن : ع < ٠
إذا كان : المنحنى	متزايد فإن : جـ > ٠	متناقص فإن : جـ < ٠
إذا كان :	ع جـ > ٠ فإن : الحركة متسارعة	ع جـ < ٠ فإن : الحركة تقصيرية
إذا كان : منحنى ع = د (ن) دالة ثابتة فإن : جـ = ٠		
إذا كان : المنحنى يقع	أعلى محور ن فإن : الجسم يتحرك بسرعة منتظمة فى نفس اتجاه الحركة	أسفل محور ن فإن : الجسم يتحرك بسرعة منتظمة فى عكس اتجاه الحركة

تحديد منحنيات (الموضع – الزمن) ، (السرعة – الزمن) ، (العجلة – الزمن) من شكل :



بملاحظة الشكل المقابل نجد :

بالنسبة للمنحنى (١) :

عند ن = ١ توجد قيمة عظمى

، عند ن = ٣ توجد قيمة صغرى

بالنسبة للمنحنى (٢) :

عند ن = ٢ توجد قيمة صغرى

بالنسبة للمنحنى (٣) :

لا توجد قيم عظمى أو صغرى

∴ درجة دالة المنحنى (١) = درجة دالة المنحنى (٢) + ١ ،

درجة دالة المنحنى (٢) = درجة دالة المنحنى (٣) + ١

∴ المنحنى (١) يمثل منحنى الموضع – الزمن ،

المنحنى (٢) يمثل منحنى السرعة – الزمن ،

المنحنى (٣) يمثل منحنى العجلة – الزمن

و بطريقة أخرى :

بالنسبة للمنحنى (١) :

فى] ٠ ، ١ [،] ٣ ، ٤ [: المنحنى متزايد ، و ميل المماس موجب

∴ مشتقة دالته تقع أعلى محور ن فى هاتين الفترتين

عند ن = ١ ، ن = ٣ : المماس أفقى

∴ قيمة مشتقة دالته عند هاتين النقطتين = ٠ .

فى] ١ ، ٣ [: المنحنى متناقص ، و ميل المماس سالب

∴ مشتقة دالته تقع أسفل محور ن فى هذه الفترة

و المنحنى (٢) يحقق ذلك

∴ درجة دالة المنحنى (١) = درجة دالة المنحنى (٢) + ١

بالنسبة للمنحنى (٢) بالإضافة لما سبق و ما حققه نلاحظ :

فى] ٠ ، ٢ [: المنحنى متناقص ، و ميل المماس سالب

∴ مشتقة دالته تقع أسفل محور ن فى هذه الفترة

عند ن = ١ : المماس أفقى

∴ قيمة مشتقة دالته عند هذه النقطة = ٠ .

فى] ٣ ، ٤ [: المنحنى متزايد ، و ميل المماس موجب

∴ مشتقة دالته تقع أعلى محور ن فى هذه الفترة

و المنحنى (٣) يحقق ذلك

∴ درجة دالة المنحنى (٢) = درجة دالة المنحنى (٣) + ١

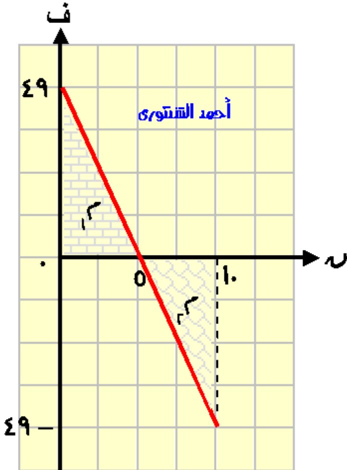
مما سبق يتضح : المنحنى (١) يمثل منحنى الموضع – الزمن ،

المنحنى (٢) يمثل منحنى السرعة – الزمن ،

المنحنى (٣) يمثل منحنى العجلة – الزمن

إجابة تفكير ناقد صفحة ١٣١

كيف نحسب من المنحنى السابق السرعة – الزمن فى مثال (١) المسافة المقطوعة خلال رحلة الحجر حتى عودته إلى نقطة القذف و كذلك ازاحته خلال هذا الزمن ؟



الحل

المسافة = المساحة $م_١$ + المساحة $م_٢$

= $\frac{١}{٢}$ × ٥ × ٤٩ + $\frac{١}{٢}$ × ٥ × ٤٩

= ١٢٢,٥ + ١٢٢,٥ = ٢٤٥ متر

الازاحة = المساحة $م_١$ – المساحة $م_٢$

= $\frac{١}{٢}$ × ٥ × ٤٩ – $\frac{١}{٢}$ × ٥ × ٤٩

= ١٢٢,٥ − ١٢٢,٥ = صفر

حل آخر

من العلاقة المعطاة :

∵ س = ٤٩ ن − ٤,٩ ن² ∴ ف = ٤٩ ن − ٤,٩ ن²

المسافة المقطوعة = | ف(٥) − ف(٠) | + | ف(١٠) − ف(٥) |

= | ١٢٢,٥ − ٠ | + | ٠ − ١٢٢,٥ | = ١٢٢,٥ + ١٢٢,٥

= ٢٤٥ متر

الازاحة = | ف(٥) − ف(٠) | − | ف(١٠) − ف(٥) |

= | ١٢٢,٥ − ٠ | − | ٠ − ١٢٢,٥ | = ١٢٢,٥ − ١٢٢,٥ = صفر

إجابة حاول أن تحل (أ) صفحة ١٣١

جسيم يتحرك فى خط مستقيم بحيث كان موضعه س⃗ عند أى لحظة زمنية يعطى بالعلاقة س⃗(ن) = (ن² − ٤ ن + ٣) ى⃗ حيث س مقاسة بالمتر ، ن بالثانية ، ى⃗ متجه وحدة فى اتجاه حركة الجسيم

(أ) أوجد ازاحة الجسيم خلال الثوانى الثلاث الأولى

(ب) أوجد متجه السرعة المتوسطة للجسيم عندما ن ∋ [٠ ، ٢]

(حـ) أوجد سرعة الجسيم عندما ن = ٤

(ء) من خلال منحنى السرعة – الزمن ، منحنى الموضع – الزمن قم بتحليل حركة الجسيم و بين متى يغير الجسيم اتجاه حركته

الحل

س⃗٠ = (٠)² − ٤ × ٠ + ٣ = ٣ بالمثل : س⃗٣ = ٠ ، س⃗٢ = −١

(أ) ف⃗٣ = س⃗٣ − س⃗٠ = (٠ − ٣) ى⃗ = − ٣ ى⃗ أى أن :

ازاحة الجسيم خلال الثوانى الثلاث الأولى = ٣ متر فى عكس اتجاه حركته

(ب) متجه السرعة المتوسطة = (س⃗٢ − س⃗٠) ÷ (٢ − ٠) = − ٢ ى⃗

(حـ) ع⃗ = ءس⃗ / ءن = (٢ ن − ٤) ى⃗

و عندما : ن = ٤ فإن : ع⃗ = ٤ ى⃗

(ء) الشكلان المقابلان يوضحان :
منحنى السرعة – الزمن ،
منحنى الموضع – الزمن

من منحنى الموضع – الزمن :

(١) عند بدء الحركة يكون متجه موضع الجسيم هو ٣ ى⃗ من نقطة ثابتة (و)

(٢) يتحرك الجسيم نحو (و) و يصل إليها عند : ن = ١ ثم يتحرك خلف (و)

(٣) يسكن الجسيم لحظياً عند : ن = ٢

(٤) يغير الجسيم اتجاه حركته بعد : ن = ٢

(٥) يصل الجسيم لنفس النقطة الثابتة (و) عند : ن = ٢ و يتجاوزها فى الاتجاه المضاد للحركة الذى بدأ فيه

(٦) بدأ الجسيم الحركة بتسارع ثم تباطأ حتى سكن عند لحظياً ن = ٢ ثم تسارع مرة أخرى

من منحنى السرعة – الزمن :

(١) عند بدء الحركة كانت سرعة الجسيم ٤ م / ث

(٢) تتناقص سرعة الجسيم خلال الفترة الزمنية [٠ ، ٢ [حتى يسكن لحظياً عند : ن = ٢ ثم يغير اتجاه حركته بعدها

(٣) تتزايد سرعة الجسيم خلال الفترة الزمنية] ٢ ، ∞ [فى الاتجاه المضاد للحركة الذى بدأ فيه

(٤) ميل الخط المستقيم = عجلة الجسيم = $\frac{١}{٢}$ " ثابتة أى : حـ موجبة "

(٥) سرعة الجسيم] ٠ ، ٢ [سالبة " المنحنى يقع أسفل محور (ن)
، حـ موجبة لذا فهو يتحرك حركة تقصيرية خلال الفترة الزمنية] ٠ ، ٢ [

(٦) سرعة الجسيم] ٠ ، ٢ [موجبة " المنحنى يقع أعلى محور (ن)
، حـ موجبة لذا فهو يتحرك حركة متسارعة خلال الفترة الزمنية] ٠ ، ٢ [

إجابة تفكير ناقد صفحة ١٣٣

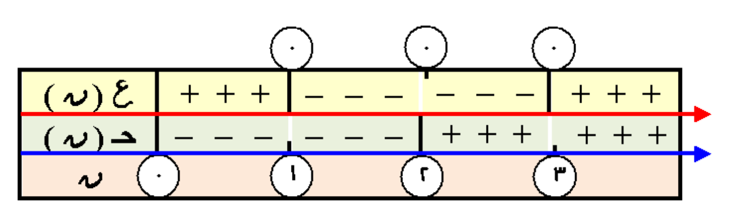
مستعيناً بالشكل السابق بين فترات التسارع و فترات التقصير لحركة الجسيم

الحل

∵ ع تقع أعلى محور (ن) فى] ٠ ، ١ [،] ٣ ، ∞ [
، أسفل محور (ن) فى] ٢ ، ٣ [
∴ ع > ٠ فى] ٠ ، ١ [،] ٣ ، ∞ [، ع < ٠ فى] ٢ ، ٣ [
، ∵ حـ تقع أسفل محور (ن) فى] ٠ ، ٢ [
، تقع أعلى محور (ن) فى] ٣ ، ∞ [
∴ حـ < ٠ فى] ٠ ، ٢ [، حـ > ٠ فى] ٣ ، ∞ [
∴ ع حـ > ٠ فى] ١ ، ٢ [،] ٣ ، ∞ [
∴ فترات التسارع هى :] ١ ، ٢ [،] ٣ ، ∞ [
، ع حـ < ٠ فى] ٠ ، ١ [،] ٢ ، ٣ [
∴ فترات التقصير هى :] ٠ ، ١ [،] ٢ ، ٣ [

حل آخر

بدراسة إشارة كل من ع ، حـ نجد : ع = ٣ن^{٢} − ١٢ن + ٩
∴ ع = ٣ (ن^{٢} − ٤ن + ٣) = ٣ (ن − ٣) (ن − ١) ،
، حـ = ٦ن − ١٢ = ٦ (ن − ٢)



∴ فترات التسارع هى :] ١ ، ٢ [،] ٣ ، ∞ [لأن : ع ، حـ لهما نفس الاشارة
، فترات التقصير هى :] ٠ ، ١ [،] ٢ ، ٣ [لأن : ع ، حـ مختلفا الاشارة

إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ١٣٣

إذا كان متجه سرعة جسيم ع→ يعطى كدالة فى الزمن بالعلاقة :
ع→(ن) = − (ن^{٢} − ٦ن + ٥) ى→ حيث ى→ متجه وحدة فى اتجاه حركة الجسم

(أ) متى يغير الجسيم حركته ؟
(ب) متى تزداد سرعة الجسيم و متى تتناقص ؟
(حـ) أوجد عجلة حركة الجسيم عندما تنعدم السرعة

الحل

(أ) يغير الجسيم حركته عندما يسكن لحظياً أى عندما : ع→ = ٠→
∴ − (ن^{٢} − ٦ن + ٥) = ٠ ∴ − (ن − ١) (ن − ٥) = ٠
∴ ن = ١ ، ن = ٥
∴ يغير الجسيم حركته عند : ن = ١ ، عند : ن = ٥

(ب) حـ→ = $\frac{دع→}{دن}$ = − (٢ن − ٦) ى→
∴ حـ = − (٢ن − ٦)
= − ٢ (ن − ٣)

حـ(ن)	+ + +	− − −
ن	٠	٣

∴ حـ > ٠ فى] ٠ ، ٣ [∴ ع تزداد فى] ٠ ، ٣ [
، حـ < ٠ فى] ٣ ، ∞ [∴ ع تتناقص فى] ٣ ، ∞ [

(حـ) ∵ ع = ٠ عندما : ن = ١ ، ن = ٥

∴ عند : ن = ١ فإن : حـ = ٤ ى

، عند : ن = ١ فإن : حـ = − ٤ ى

إجابة تفكير ناقد صفحة ١٣٤

الشكل المرفق يبين سرعة جسيم ع = د (ن) يتحرك فى خط مستقيم

(أ) متى يتحرك الجسيم للأمام و متى يتحرك للخلف ؟ و متى تتزايد سرعته و متى تتباطأ ؟

(ب) متى تكون عجلة الحركة موجبة ؟ و متى تكون سالبة ؟ و متى تنعدم ؟

(حـ) متى تصل سرعة الجسيم إلى قيمتها العظمى ؟

(ء) متى يتوقف الجسيم لمدة أكثر من ثانية ؟

الحل

(أ) ∵ المنحنى يقع أعلى محور (ن) " ع > ٠ " فى كل من :] ٠ ، ١ [،] ٦ ، ٧ [

∴ الجسيم يتحرك للأمام فى كل من] ٠ ، ١ [،] ٦ ، ٧ [

∵ المنحنى يقع أسفل محور (ن) " ع < ٠ " فى] ١ ، ٥ [

∴ الجسيم يتحرك للخلف فى] ١ ، ٥ [

∵ المنحنى يقع أعلى محور (ن) و ميله موجب " حـ > ٠ " فى] ٥ ، ٦ [

، يقع أسفل محور (ن) و ميله سالب " حـ < ٠ " فى] ١ ، ٢ [

∴ سرعة الجسيم تتزايد فى كل من] ١ ، ٢ [،] ٥ ، ٦ [

∵ المنحنى يقع أعلى محور (ن) و ميله سالب فى كل من] ٠ ، ١ [،] ٦ ، ٧ [، يقع أسفل محور (ن) و ميله موجب فى] ٣ ، ٥ [

∴ سرعة الجسيم تباطأ فى كل من] ٠ ، ١ [،] ٣ ، ٥ [،] ٦ ، ٧ [

(ب) ∵ المنحنى متزايد فى] ٣ ، ٦ [∴ عجلة الجسيم موجبة فى] ٣ ، ٦ [

∵ المنحنى متناقص فى كل من] ٠ ، ٢ [،] ٦ ، ٧ [

∴ عجلة الجسيم سالبة فى كل من] ٠ ، ٢ [،] ٦ ، ٧ [

∵ للمنحنى قيم عظمى عند كل من ن = ٠ ، ن = ٦ ، و قيمة صغرى فى] ٢ ، ٣ [

∴ عجلة الجسيم تنعدم عند كل من ن = ٠ ، ن = ٦ ، و فى] ٢ ، ٣ [

(حـ) ∵ للمنحنى قيم عظمى عند كل من ن = ٠ و عندها ع = ٢ ، ن = ٦ و عندها ع = ١

∴ تصل سرعة الجسيم إلى قيمتها العظمى عند ن = ٠

(ء) يتوقف الجسيم لمدة أكثر من ثانية فى] ٧ ، ٩ [

إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ١٣٤

جسيم يتحرك فى خط مستقيم بحيث كانت العلاقة بين ع ، س تعطى فى الصورة $ع = \frac{٥}{٤ + س}$ حيث ع مقاسة بوحدة م/ث ، س مقاسة بالمتر أوجد عجلة الحركة عندما س = ٢ متر

الحل

∵ $ع = ٥ (٤ + س)^{-١}$

∴ $حـ = ع \times \frac{ءع}{ءس} = ٥ (٤ + س)^{-١} \times [-٥ (٤ + س)^{-٢}]$

∴ $حـ = \frac{-٢٥}{(٤ + س)^{٣}}$ ، عندما س = ٢ فإن : $حـ = -\frac{٢٥}{٢١٦}$ م / ث^{٢}

إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة ١٣٥

يتحرك جسيم فى خط مستقيم بحيث كان القياس الجبرى لمتجه سرعته ع فى علاقة مع القياس الجبرى لمتجه موضعه س معطاة بالصورة :

$ع^2 = \frac{1}{8(4 - س^2)}$ أوجد حـ بدلالة س حيث حـ القياس الجبرى لعجلة الحركة ثم أوجد أصغر سرعة للجسيم المتحرك

الحل

$\because ع^2 = \frac{1}{8(4 - س^2)}$ حيث : $س \in]-2 , 2[$

$\therefore ع^2 = \frac{1}{8}(4 - س^2)^{-1}$ باللاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$2ع \times \frac{ءع}{ءس} = -\frac{1}{8}(4 - س^2)^{-2} \times -2س = \frac{2س}{8(4 - س^2)^2}$

$\therefore ع \frac{ءع}{ءس} = \frac{س}{8(4 - س^2)^2}$ $\therefore حـ = \frac{س}{8(4 - س^2)^2}$

$\because$ حـ = ٠ عندما : س = ٠ ، بدراسة اشارة حـ كما بالشكل التالى نجد :

س	-2	٠	٢
إشارة حـ	– –	٠	+ +
ع	تناقصية	☒	تزايدية
		قيمة صغرى محلية	

عندما : س < ٠

فإن : حـ < ٠

، عندما : س > ٠

فإن : حـ > ٠

$\therefore$ توجد قيمة صغرى للسرعة ع

" أصغر سرعة " عند : س = ٠ .

$\therefore$ عند : س = ٠ فإن : $ع^2 = \frac{1}{32}$

$\therefore$ أصغر سرعة للجسيم المتحرك $= \pm \frac{1}{8}\sqrt{2}$ وحدة سرعة

حل تمارين (١ – ١) صفحة ١٣٥ بالكتاب المدرسى

تخير الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

(١) عندما يتحرك جسيم فى خط مستقيم بسرعة ثابتة فإن : عجلته ....

(أ) يزداد (ب) يتناقص (حـ) ثابت لا يساوى الصفر (ء) صفر

(٢) التغير فى متجه موضع جسيم يتحرك فى خط مستقيم يعرف بأنه : ....

(أ) الازاحة (ب) المسافة (حـ) متجه السرعة (ء) متجه العجلة

(٣) جسيم يتحرك فى خط مستقيم بحيث كانت : $ع = 3هـ^{ن+2}$ فإن : سرعته الابتدائية تساوى ....

(أ) ٣ (ب) هـ (حـ) $3هـ^2$ (ء) $هـ^2$

(٤) جسيم يتحرك فى خط مستقيم و معادلة حركته : س = طا ن فإن : عجلة الحركة حـ تساوى ....

(أ) $قا^2 ن$ (ب) ٢ قا ن (حـ) ٢ ع س (ء) ع س

(٥) جسيم يتحرك فى خط مستقيم و كانت معادلة حركته :

$س = 2 + لو_{هـ}(ن + 1)$ فإن : ....

(أ) سرعته و عجلة الحركة تتناقصان دائماً

(ب) سرعته و عجلة الحركة تتزايدان دائماً

(حـ) السرعة تتناقص و عجلة الحركة تزداد

(ء) السرعة تتزايد و عجلة الحركة تتناقص

الحل

(١) بفرض أن : ع = م حيث : م ثابت $\therefore حـ = \frac{ءع}{ءن} = $ صفر

(٢) الازاحة

(٣) $\because ع = 3هـ^{ن+2}$ ، بوضع : ن = ٠ $\therefore ع_. = 3هـ^2$

أى أن : سرعة الجسيم الابتدائية = ٣ هـ^{٢}

(٤) ∵ س = ظا ن ∴ ع = $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ = قا^{٢}ن

، حـ = $\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ = ٢ قا ن × قا ن ظا ن = ٢ قا^{٢}ن ظا ن = ٢ ع س

(٥) ∵ س = ٢ + لو$_{هـ}$ (ن + ١)

∴ ع = $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ = $\frac{١}{\text{ن} + ١}$ = (ن + ١)$^{-١}$ و منها : السرعة تتناقص

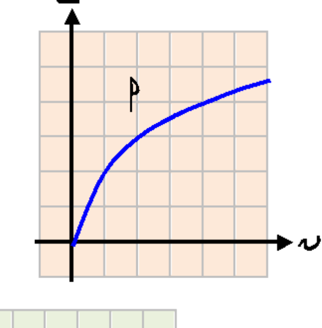
، حـ = $\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ = − ١ × (ن + ١)$^{-٢}$ = $\frac{-١}{(\text{ن} + ١)^{٢}}$

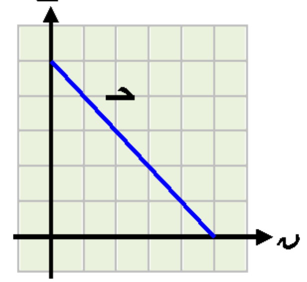
و منها : عجلة الحركة تتزايد أى أن : السرعة تتناقص و عجلة الحركة تزداد

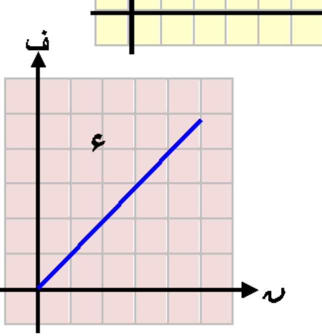
(٦) تخير الرسم البيانى أمام كل جملة من الجمل الآتية :

١) الجسيم متوقف ٢) الجسيم يتحرك للأمام بسرعة ثابتة

٣) الجسيم يرجع للخلف ٤) مقدار سرعة الجسيم تتناقص









الحل

فى شكل م :

∵ المنحنى محدب لأعلى ∴ حـ < ٠

∴ ع تتناقص أى أن : مقدار سرعة الجسيم تتناقص

فى شكل ب :

∵ المنحنى يمثل دالة ثابتة ∴ الميل = ٠

∴ ع = ٠ ∴ الجسيم متوقف

فى شكل حـ :

∵ المنحنى يمثل دالة خطية ∴ منحنى ع دالة ثابتة

، ∵ المنحنى متناقص ∴ الميل < ٠

∴ ع < ٠ ∴ الجسيم يرجع للخلف

فى شكل ء :

∵ المنحنى يمثل دالة خطية ∴ منحنى ع دالة ثابتة

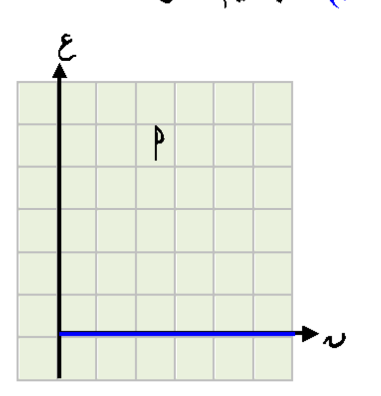
، ∵ المنحنى متزايد ∴ الميل > ٠

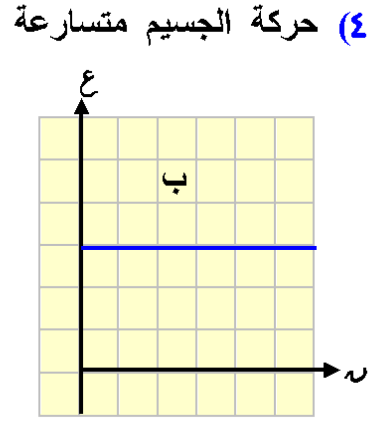
∴ ع > ٠ ∴ الجسيم يتحرك للأمام بسرعة ثابتة

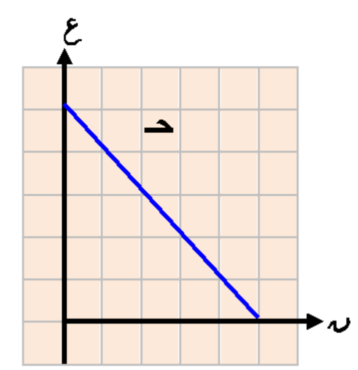
(٧) تخير الرسم البيانى أمام كل جملة من الجمل الآتية :

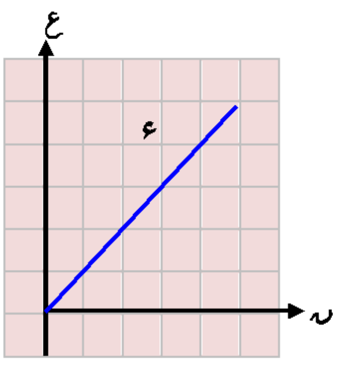
١) حركة الجسيم تقصيرية ٢) الجسيم يتحرك بسرعة ثابتة

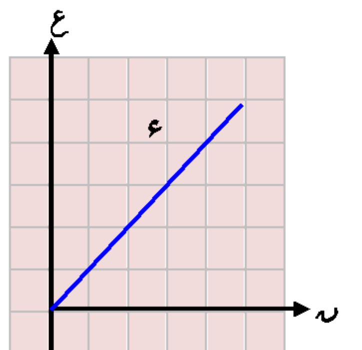
٣) الجسيم متوقف ٤) حركة الجسيم متسارعة











الحــل

فى شكل أ :

∵ المنحنى يقع على محور ن ∴ ع = ٠ .

∴ الجسم متوقف

فى شكل ب :

∵ المنحنى يقع أعلى محور ن ∴ ع > ٠ .

، ∵ دالة المنحنى ثابتة ∴ الميل = ٠ . ∴ جـ = ٠ .

∴ الجسم يتحرك بسرعة ثابتة

فى شكل جـ :

∵ المنحنى يقع أعلى محور ن ∴ ع > ٠ .

، ∵ المنحنى متناقص ∴ الميل سالب ∴ جـ < ٠ .

∴ ع جـ < ٠ . ∴ حركة الجسيم تقصيرية

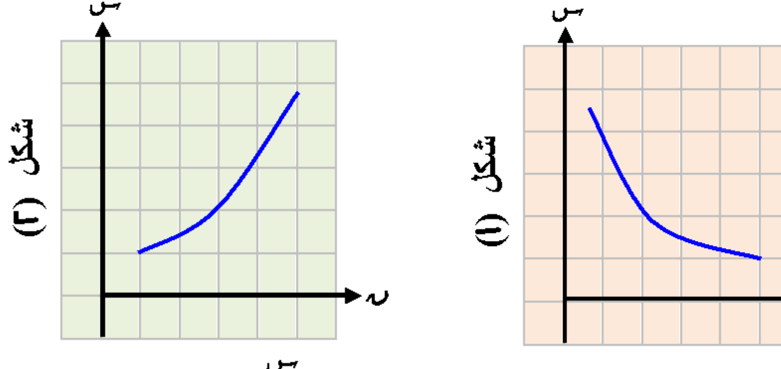
فى شكل ء :

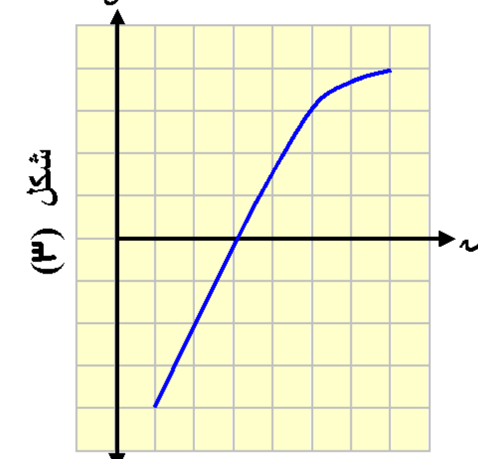
∵ المنحنى يقع أعلى محور ن ∴ ع > ٠ .

، ∵ المنحنى متزايد ∴ الميل موجب ∴ جـ > ٠ .

∴ ع جـ > ٠ . ∴ حركة الجسيم متسارعة

(٨) فى كل من المنحنيات المرسومة (منحنى الموضع – الزمن) حدد إشارة القياس الجبرى لمتجه السرعة ، ثم عين ما إذا كان الجسيم يتحرك بتسارع أو يتباطأ (يتحرك ببطء)





الحــل

فى شكل (١) :

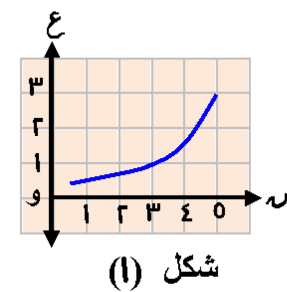
∵ المنحنى متناقص ∴ الميل سالب ∴ ع < ٠ .

، ∵ المنحنى محدب لأسفل ∴ جـ > ٠ .

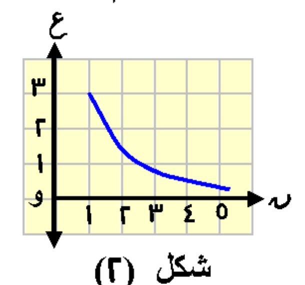
∴ ع جـ < ٠ . ∴ الجسيم يتباطأ (يتحرك ببطء)

فى شكل (٢) : ∵ المنحنى متزايد ∴ الميل موجب ∴ ع > ٠ .
، ∵ المنحنى محدب لأسفل ∴ جـ > ٠ .
∴ ع جـ > ٠ . ∴ الجسيم يتحرك بتسارع
فى شكل (٣) : ∵ المنحنى متزايد ∴ الميل موجب ∴ ع > ٠ .
، ∵ المنحنى محدب لأعلى ∴ جـ < ٠ .
∴ ع جـ < ٠ . ∴ الجسيم يتباطأ (يتحرك ببطء)

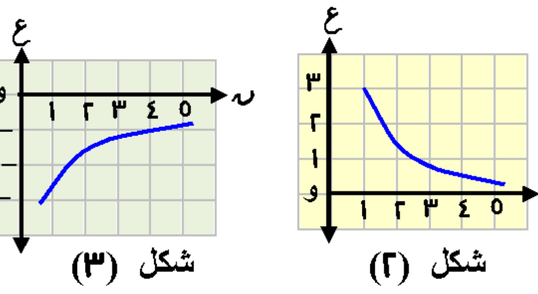
(٩) فى كل من المنحنيات المرسومة (منحنى السرعة – الزمن) حدد إشارة العجلة ، و إذا كان الجسيم يتحرك بتسارع أو يتحرك بتباطؤ



شكل (١)



شكل (٢)

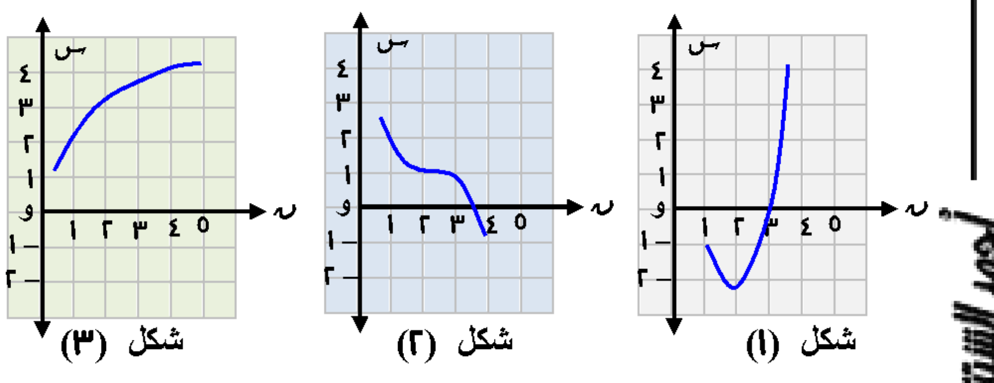


شكل (٣)

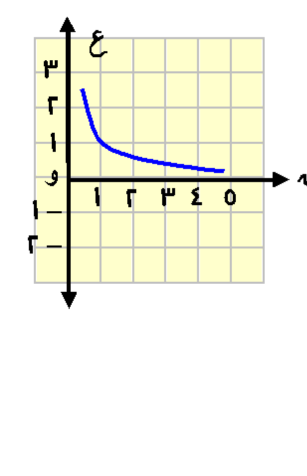
الحل

فى شكل (١) : ∵ المنحنى أعلى محور ن ∴ ع > ٠ .
، ∵ المنحنى متزايد ∴ الميل موجب ∴ جـ > ٠ .
∴ ع جـ > ٠ . ∴ الجسيم يتحرك بتسارع
فى شكل (٢) : ∵ المنحنى أعلى محور ن ∴ ع > ٠ .
، ∵ المنحنى متناقص ∴ الميل سالب ∴ جـ < ٠ .
∴ ع جـ < ٠ . ∴ الجسيم يتحرك بتباطؤ
فى شكل (٣) : ∵ المنحنى أسفل محور ن ∴ ع < ٠ .
، ∵ المنحنى متناقص ∴ الميل موجب ∴ جـ > ٠ .
∴ ع جـ < ٠ . ∴ الجسيم يتحرك بتباطؤ

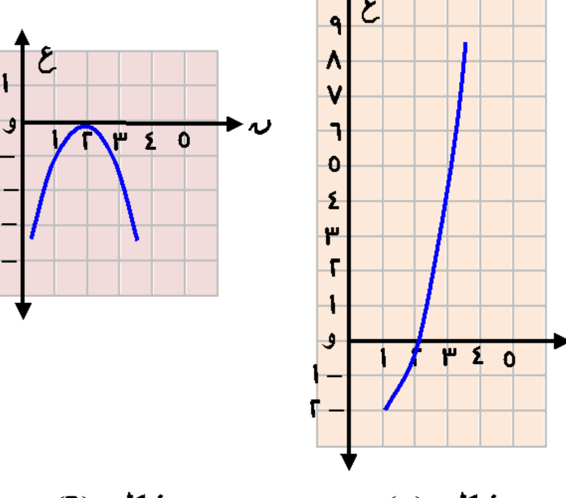
(١٠) أمامك ثلاثة منحنيات (١) ، (٢) ، (٣) كل منها تمثل منحنى الموضع – الزمن ، و ثلاثة منحنيات (٤) ، (٥) ، (٦) كل منها تمثل منحنى السرعة – الزمن ، صل كل منحنى من المجموعة الأولى بالمنحنى المناظر له من المجموعة الثانية



شكل (١)　　شكل (٢)　　شكل (٣)



شكل (٤)



شكل (٥)　　شكل (٦)

الحل

دراسة شكل (١) :

فى [١ ، ٢ [الجسيم يتحرك فى الاتجاه السالب (لأسفل)

، ∵ المنحنى متناقص ∴ الميل سالب ∴ ع < ٠ .

عند ن = ٢ : الجسيم يغير اتجاه حركته لأن ميل المماس = ٠ أى أن : ع = ٠

فى] ٢ ، ٣,٥] الجسيم يتحرك فى الاتجاه الموجب (لأعلى)

، ∵ المنحنى متزايد ∴ الميل موجب ∴ ع > ٠ .

و هذا يتفق مع المنحنى بشكل (٥)

دراسة شكل (٢) :

فى [٠,٥ ، ٢ [الجسيم يتحرك فى الاتجاه السالب (لأسفل)

، ∵ المنحنى متناقص ∴ الميل سالب ∴ ع < ٠ .

عند ن = ٢ : الجسيم يغير اتجاه حركته لأن ميل المماس = ٠ أى أن : ع = ٠

فى] ٢ ، ٣,٥] الجسيم يتحرك فى الاتجاه السالب (لأسفل)

، ∵ المنحنى متناقص ∴ الميل سالب ∴ ع < ٠ .

و هذا يتفق مع المنحنى بشكل (٦)

دراسة شكل (٣) :

الجسيم يتحرك فى الاتجاه الموجب (لأعلى) دائماً

، ∵ المنحنى متناقص ∴ الميل سالب ∴ ع < ٠ .

و هذا يتفق مع المنحنى بشكل (٤)

(١١) إذا كانت : ع = ٣ س فأوجد حـ بدلالة س ثم أوجد حـ عندما س = ٢

الحل

∵ ع = ٣ س ، ∵ حـ = ع . $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

∴ حـ = ٣ س × $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (٣ س) = ٣ س × ٣ = ٩ س

و عندما : س = ٢ فإن : حـ = ٩ × ٢ = ١٨ وحدة عجلة

حل آخر

∵ ع = ٣ س ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى الزمن ن ينتج :

$\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$ = ٣ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ ، ∵ حـ = $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$ ، ع = $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

∴ حـ = ٣ ع = ٣ × ٣ س = ٩ س

و عندما : س = ٢ فإن : حـ = ٩ × ٢ = ١٨ وحدة عجلة

(١٢) يتحرك جسيم فى خط مستقيم بحيث كان القياس الجبرى لمتجه سرعته ع يعطى فى علاقة مع القياس الجبرى للموضع س يعطى بالصورة : ع = س + $\frac{١}{\text{س}}$ ، أوجد عجلة الحركة عندما : س = ٢ حيث : س مقاسة بالمتر ، ع مقاسة بوحدة م / ث

الحل

∵ ع = س + $\frac{١}{\text{س}}$ = س + $\text{س}^{-١}$ ، ∵ حـ = ع . $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

∴ حـ = (س + $\text{س}^{-١}$) × $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (س + $\text{س}^{-١}$)

= (س + $\text{س}^{-١}$) (١ − $\text{س}^{-٢}$) = (س + $\frac{١}{\text{س}}$) (١ − $\frac{١}{\text{س}^{٢}}$)

و عندما : س = ٢ فإن : حـ = (٢ + $\frac{١}{٢}$) (١ − $\frac{١}{٤}$)

= $\frac{٥}{٢}$ × $\frac{٣}{٤}$ = $\frac{١٥}{٨}$ م / $\text{ث}^{٢}$

حل آخر

∵ ع = س + $\text{س}^{-١}$ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى الزمن ن ينتج :

$\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$ = (١ − $\text{س}^{-٢}$) $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ ، ∵ حـ = $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$ ، ع = $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

∴ حـ = (١ − $\text{س}^{-٢}$) × ع = (١ − $\text{س}^{-٢}$) (س + $\text{س}^{-١}$)

و عندما : س = ٢ فإن : حـ = $\frac{٥}{٢}$ × $\frac{٣}{٤}$ = $\frac{١٥}{٨}$ م / $\text{ث}^{٢}$

(١٣) جسيم يتحرك فى خط مستقيم بحيث كان القياس الجبرى لمتجه سرعته ع يعطى فى علاقة مع القياس الجبرى للموضع س يعطى بالصورة : $ع = \frac{1}{س^2}$ ، أوجد حـ بدلالة س ، ثم أوجد حـ عندما : $س = \frac{1}{2}$

الحل

∵ $ع = \frac{1}{س^2} = س^{-2}$ ، ∵ $حـ = ع . \frac{دع}{دس}$

∴ $حـ = س^{-2} \times \frac{د}{دس}(س^{-2}) = س^{-2} \times (-2 س^{-3}) = -2 س^{-5}$

و عندما : $س = \frac{1}{2}$ فإن : $حـ = -2 \times (\frac{1}{2})^{-5} = -64$ وحدة عجلة

حل آخر

∵ $ع = س^{-2}$ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى الزمن ن ينتج :

$\frac{دع}{دن} = (-2 س^{-3}) \frac{دس}{دن}$ ، ∵ $حـ = \frac{دع}{دن}$ ، $ع = \frac{دس}{دن}$

∴ $حـ = ٣ ع = (-2 س^{-3}) \times س^{-2} = -2 س^{-5}$

و عندما : $س = \frac{1}{2}$ فإن : $حـ = -2 \times (\frac{1}{2})^{-5} = -64$ وحدة عجلة

(١٤) جسيم يتحرك فى خط مستقيم بحيث كان القياس الجبرى لمتجه سرعته ع يعطى فى علاقة مع القياس الجبرى للموضع س يعطى بالصورة : $ع^2 = 16 - 9$ حتا س ، أوجد أقصى سرعة للجسيم و عجلة الحركة عندئذ

الحل

∵ $ع^2 = 16 - 9$ حتا س (١) ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$2 ع \frac{دع}{دس} = -9 \times (-$ حا س $) = 9$ حا س

∴ $ع \frac{دع}{دس} = \frac{9}{2}$ حا س ∴ $حـ = \frac{9}{2}$ حا س (٢)

، عندما : حـ = ٠ فإن : حا س = ٠

∴ $س = 0$ أ، 2π أ، ..... أ، -2π أ، -4π أ، .....

، $س = \pi$ أ، 3π أ، ..... أ، $-\pi$ أ، -3π أ، .....

و بدراسة اشارة حـ بالشكل التالى نجد :

س	..	-2π		$-\pi$		٠		π		2π	..
إشارة حـ			+		−		+		−	٠	
ع			تزايدية		تناقصية		تزايدية		تناقصية		
				قيمة عظمى محلية				قيمة عظمى محلية			

أقصى سرعة للجسيم تكون عندما :

$س = \pi$ أ، 3π أ، ..... أ، $-\pi$ أ، -3π أ، .....

، عند : $س = \pi$ " مثلاً " بالتعويض فى (١) ينتج :

$ع^2 = 16 - 9 \times (-1) = 25$ ∴ $ع = \pm 5$

∴ أقصى سرعة للجسيم = ± ٥

، بالتعويض فى (٢) ينتج : $حـ = \frac{9}{2}$ حا $\pi = 0$

" أى تنعدم العجلة عندما يصل إلى أقصى سرعة (سرعة منتظمة) "

لاحظ من الشكل :

أصغر سرعة للجسيم تكون عندما :

$س = 0$ أ، 2π أ، ..... أ، -2π أ، -4π أ، .....

، عند : س = ٠ " مثلاً " بالتعويض فى (١) ينتج :

$ع^2 = 16 - 9 \times 1 = 7$ ∴ $ع = \pm \sqrt{7}$

(١٥) جسيم يتحرك فى خط مستقيم بحيث تكون معادلة حركته تعطى بالصورة : س (ن) = ٣ حتا ن + ٤ حا ن   حيث : س مقاسة بالمتر ، ن مقاسة بالثانية أوجد :

(أ) القياس الجبرى للازاحة $\overleftarrow{ف}$ عندما : ن = $\frac{١}{٢}\pi$ ، ن = π

(ب) القياس الجبرى لمتجه السرعة $\overleftarrow{ع}$

عندما : ن = ٠ ، ن = $\frac{١}{٢}\pi$ ، ن = π

(حـ) أقصى ازاحة للجسيم

الحل

∵ ف = س (ن) − س (٠)

، س (٠) = ٣ حتا ٠ + ٤ حا ٠ = ٣ × ١ + ٤ × ٠ = ٣

∴ ف = ٣ حتا ن + ٤ حا ن − ٣

(أ) ∵ ف = ٣ حتا ن + ٤ حا ن − ٣

∴ عندما : ن = $\frac{١}{٢}\pi$ فإن : ف = ٣ × ٠ + ٤ × ١ − ٣ = ١

، عندما : ن = π فإن : ف = ٣ × (−١) + ٤ × ٠ − ٣ = −٦

(ب) ع = $\frac{ءف}{ءن}$ = −٣ حا ن + ٤ حتا ن

∴ عندما : ن = ٠ فإن : ع = −٣ × ٠ + ٤ × ١ = ٤

، عندما : ن = $\frac{١}{٢}\pi$ فإن : ع = −٣ × ١ + ٤ × ٠ = −٣

، عندما : ن = π فإن : ع = −٣ × ٠ + ٤ × (−١) = −٤

(حـ) ∵ ف = ٣ حتا ن + ٤ حا ن − ٣

∴ ع = $\frac{ءف}{ءن}$ = −٣ حتا ن + ٤ حا ن

، حـ = $\frac{ءع}{ءن}$ = $\frac{ء^٢ف}{ءف^٢}$ = −٣ حتا ن − ٤ حا ن

و عندما : ع = ٠ فإن : −٣ حتا ن + ٤ حا ن = ٠

∴ ٤ حتا ن = ٣ حا ن   بالقسمة ÷ حتا ن ينتج :

ظا ن = $\frac{٤}{٣}$

٥
٣
٤
ن
أحمد الشنتورى

∴ ن تقع فى الربع الأول أو الربع الثالث

∴ حا ن = $\frac{٤}{٥}$ ، حتا ن = $\frac{٣}{٥}$

، ∵ حـ " $\frac{ء^٢ف}{ءف^٢}$ " < ٠ " سالبة "

∴ عند : حا ن = $\frac{٤}{٥}$ ، حتا ن = $\frac{٣}{٥}$ تكون ف أكبر ما يمكن

أ؛ حا ن = − $\frac{٤}{٥}$ ، حتا ن = − $\frac{٣}{٥}$

، ∵ حـ " $\frac{ء^٢ف}{ءف^٢}$ " > ٠ " موجبة "

∴ عند : حا ن = − $\frac{٤}{٥}$ ، حتا ن = − $\frac{٣}{٥}$ تكون ف أقل ما يمكن

∴ أقصى ازاحة هى :

ف = ٣ × $\frac{٣}{٥}$ + ٤ × $\frac{٤}{٥}$ − ٣

= $\frac{٩}{٥}$ + $\frac{١٦}{٥}$ = $\frac{٢٥}{٥}$ − ٣ = ٢ وحدة ازاحة

(١٦) جسيم يتحرك فى خط مستقيم تبعاً للعلاقة : س = أ حا ك ن

حيث : س يعبر عن القياس الجبرى للموضع ، ن الزمن ، أ ، ك ∈ ح أوجد :

(أ) العلاقة بين : ع ، س حيث : ع القياس الجبرى لمتجه السرعة

(ب) ع عندما : س = $\frac{١}{٢}$ أ

(حـ) الزمن المستغرق حتى يكون : س = − $\frac{١}{٢}$ أ

ثم أوجد عجلة الحركة عندئذ

الحل

(أ) ∵ س = أ حا ك ن ∴ حا ك ن = $\frac{\text{س}}{\text{أ}}$

، ع = $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = أ ك حتا ك ن

∴ ع² = أ² ك² حتا² ك ن = ك² × أ² حتا² ك ن

= ك² (أ² − أ² حا² ك ن)

= ك² (أ² − س²)

∴ ع = ± ك $\sqrt{\text{أ}^2 - \text{س}^2}$

(ب) عندما : س = ½ أ فإن :

ع = ك $\sqrt{\text{أ}^2 - \frac{1}{4}\text{أ}^2}$ و منها : ع = ± $\frac{\sqrt{3}}{2}$ أ ك

(جـ) عندما : س = − ½ أ فإن : − ½ أ = أ حا ك ن

∴ حا ك ن = − ½ " سالبة "

∴ ك ن = $\frac{7}{6}\pi + 2\text{ر}\pi$ أ؛ ك ن = $-\frac{1}{6}\pi + 2\text{ر}\pi$ حيث : ر ∈ ص

∴ ن = $\frac{\frac{7}{6}\pi + 2\text{ر}\pi}{\text{ك}}$ أ؛ ن = $\frac{-\frac{1}{6}\pi + 2\text{ر}\pi}{\text{ك}}$

، جـ = $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$ = − أ ك² حا ك ن عندما : س = − ½ أ فإن :

حا ك ن = − ½ ∴ جـ = − أ ك² × (− ½) = ½ أ ك²

١ − ٢ تكامل الدوال المتجهة

[أ] التكامل المحدد :

نلاحظ أن :

١) من تعريف التكامل غير المحدد :

ص = ∫ د′(س) ء س = د(س) + ث

حيث : ث ثابت اختيارى لا يتوقف على س ، و وجوده ضرورى ليشتمل التكامل على جميع الدوال التى معدل تغيرها هو د(س)
و على ذلك فإن : التكامل غير المحدد لا ينتج قيمة معينة للمتغير س

٢) إذا كانت قيمة التكامل عند : س = أ هى : د (أ) + ث
و قيمته عند : س = ب هى : د (ب) + ث
∴ الفرق بين قيمتى التكامل عند : س = أ ، س = ب
= د (ب) − د (أ)
و هو قيمة معينة (مهما كانت قيمة المقدار الثابت ث)
و يرمز له بالرمز $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ د′(س) ء س حيث :

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ د′(س) ء س = د (ب) − د (أ)

حيث : أ ، ب هما حدى التكامل

مثال : $\int_{1}^{4}$ (٣ س² − ٤ س + ٢) ء س =

= [٣ × ⅓ س³ − ٤ × ½ س² + ٢ س]$_{1}^{4}$

= [س³ − ٢ س² + ٢ س]$_{1}^{4}$

= [٦٤ − ٣٢ + ٨] − [١ − ٢ + ٢] = ٤٠ − ١

= ٣٩

ملاحظة :

إذا كانت د دالة متصلة على [٢ ، ب] ، د(س) ≥ ٠ فى هذه الفترة ، م هى مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د و محور السينات و المستقيمين س = ٢ ، س = ب فإن :

$$م = \int_{٢}^{ب} د(س)\, ءس$$

سيدرس التكامل المحدد و المساحات تحت المنحنى بالوحدة الرابعة " التكامل المحدد و تطبيقاته " بمقرر التفاضل و التكامل "

[٢] استنتاج السرعة و الازاحة :

١) إذا كانت : $ح = \frac{ءع}{ءن}$ فإن : $\int ح\, ءن = \int ءع$

$\therefore ع = \int ح\, ءن$ (١ – ١)

و لتعيين عجلة حركة وحيدة تطابق العجلة المعطاة ح(ن) يجب وضع الشروط الابتدائية لكل من السرعة الابتدائية $ع_٠$ ، و الموضع الابتدائى $س_٠$ و ذلك عند : ن = ٠ ، و يمكن استبدال التكامل المحدد مع حدود التكامل المناسبة فيكون :

$$\int_{ع_٠}^{ع} ءع = \int_{٠}^{ن} ح\, ءن$$

$\therefore ع - ع_٠ = \int_{٠}^{ن} ح\, ءن$ (١ – ٢)

= المساحة تحت منحنى العجلة – الزمن

و إذا كانت : العجلة ح ثابتة فإن : $ع - ع_٠ = ح \int_{٠}^{ن} ءن$

$\therefore ع - ع_٠ = ح ن$ و منها :

$ع = ع_٠ + ح ن$ (١ – ٣)

و هى المعادلة الأولى من معادلات الحركة منتظمة التغير فى خط مستقيم

ملاحظة :

لا يمكن استخدام المعادلة (١ – ٣) إلا فى حالة العجلة الثابتة أما إذا كانت العجلة دالة فى الزمن نستخدم المعادلة (١ – ١) أو (١ – ٢) حسب معطيات المسألة

٢) إذا كانت : $ع = \frac{ءس}{ءن}$ فإن : $\int ع\, ءن = \int ءس$

$\therefore س = \int ع\, ءن$

و باستخدام التكامل المحدد و حدود التكامل المناسبة نجد أن :

$$\int_{س_٠}^{س} ءس = \int_{٠}^{ن} ع\, ءن$$

$\therefore س - س_٠ = \int_{٠}^{ن} ع\, ءن$

= المساحة تحت منحنى السرعة – الزمن

لاحظ : $س - س_٠ = ف$

و إذا كانت العجلة ثابتة يمكن التعويض عن السرعة من المعادلة (١ – ٣) فيكون :

$$س - س_٠ = \int_{٠}^{ن} (ع_٠ + ح ن)\, ءن$$

$= ع_٠ ن + \frac{١}{٢} ح ن^٢$ و منها :

$س = س_٠ + ع_٠ ن + \frac{١}{٢} ح ن^٢$

$\therefore س - س_٠ = ع_٠ ن + \frac{١}{٢} ح ن^٢$ ، $س - س_٠ = ف$

$\therefore ف = ع_٠ ن + \frac{١}{٢} ح ن^٢$

و هى المعادلة الثانية من معادلات الحركة منتظمة التغير فى خط مستقيم

(٣) إذا كانت : $جـ = ع \frac{دع}{دس}$ فإن : $\int جـ \, دس = \int ع \, دع$

و باستخدام التكامل المحدد و حدود التكامل المناسبة نجد أن :

$$\int_{ع_٠}^{ع} ع \, دع = \int_{س_٠}^{س} جـ \, دس$$

$$\therefore \frac{١}{٢} (ع^٢ - ع_٠^٢) = \int_{س_٠}^{س} جـ \, دس$$

= المساحة تحت منحنى العجلة – الازاحة

و إذا كانت العجلة ثابتة فإن :

$$\frac{١}{٢} (ع^٢ - ع_٠^٢) = جـ \int_{س_٠}^{س} دس$$

$$\therefore ع^٢ - ع_٠^٢ = ٢ جـ (س - س_٠)$$

لاحظ : $س - س_٠ = ف$ $\therefore ع^٢ - ع_٠^٢ = ٢ جـ ف$

و هى المعادلة الثالثة من معادلات الحركة منتظمة التغير فى خط مستقيم

ملاحظات :

الشكل المقابل يمثل :
(منحنى السرعة – الزمن) لحركة جسيم خلال الفترة الزمنية [أ ، ب] فيكون :

(١) الازاحة $ف = \int_{أ}^{ب} ع(ن) \, دن$

= المساحة ($م_١$) – المساحة ($م_٢$)

$$= \int_{أ}^{جـ} ع(ن) \, دن - \int_{جـ}^{ب} ع(ن) \, دن$$

$$= [ف(جـ) - ف(أ)] - [ف(ب) - ف(جـ)]$$

و إذا كانت : المساحتين $م_١$ ، $م_٢$ لمضلعين هندسيين (مثلث أو مستطيل أو شبه منحرف ...) يمكن إيجاد كل منها بقانون المساحة

لكل مضلع

(٢) المسافة المقطوعة $= \int_{أ}^{ب} | ع(ن) | \, دن =$

$$= \int_{أ}^{جـ} | ع(ن) \, دن | + \int_{جـ}^{ب} | ع(ن) \, دن |$$

$$= | ف(جـ) - ف(أ) | + | ف(جـ) - ف(جـ) |$$

إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ١٤١

جسيم يتحرك فى خط مستقيم مبتدأ من السكون و على بعد ٨ أمتار من نقطة ثابتة على الخط المستقيم فإذا كانت جـ = ٦ ن – ٤ حيث جـ مقاسة بوحدة م/ث^٢ فأوجد العلاقة بين السرعة و الزمن كذلك العلاقة بين الازاحة و الزمن

الحـــل

$\because جـ = ٦ن - ٤$ $\therefore \frac{دع}{دن} = ٦ن - ٤$

$\therefore \int_{٠}^{ع} دع = \int_{٠}^{ن} جـ \, دن$ $\therefore ع = \int_{٠}^{ن} جـ \, دن$

$\therefore ع = \int_{٠}^{ن} (٦ن - ٤) \, دن$ $\therefore ع = ٣ن^٢ - ٤ن$

، $\because ع = \frac{دس}{دن}$ $\therefore \int_{٨}^{س} دس = \int_{٠}^{ن} ع \, دن$

$$\therefore [س]_{٨}^{س} = \int_{٠}^{ن} (٣ن^٢ - ٤ن) \, دن$$

$\therefore س - ٨ = ن^٣ - ٢ن^٢$ $\therefore س = ن^٣ - ٢ن^٢ + ٨$

إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ١٤٢

بدأت سيارة الحركة من السكون فى خط مستقيم من نقطة ثابتة على الخط و يعطى القياس الجبرى لمتجه سرعتها بعد زمن ن بالعلاقة :

ع = ٣ ن² + ٢ ن حيث ع مقاسة بوحدة م / ث ، ن مقاسة بالثانية
أوجد كلاً من عجلة الحركة و ازاحة السيارة عند ن = ٢

الحل

∵ ع = ٣ ن² + ٢ ن ∴ جـ = $\frac{دع}{دن}$ = ٦ ن + ٢

، عند ن = ٢ جـ = ٦ × ٢ + ٢ = ١٤ م / ث²

، ف = $\int_{٠}^{ن}$ ع دن ∴ ف (٢) = $\int_{٠}^{٢}$ (٣ ن² + ٢ ن) دن

∴ ف (٢) = [ن³ + ن²]$_{٠}^{٢}$ = (٨ + ٤) − ٠ = ١٢ م

إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ١٤٣

بدأت سيارة الحركة من السكون فى خط مستقيم من نقطة ثابتة على هذا الخط و يعطى القياس الجبرى لمتجه السرعة ع بعد زمن ن بالعلاقة :
ع = ٤ ن − ٣ ن² حيث ع مقاسة بوحدة م / ث ، ن مقاسة بالثانية
أوجد خلال الفترة الزمنية ن حيث ن ∈ [٠ ، ٤] كلاً من السرعة المتوسطة و متجه السرعة المتوسطة ،
متى تصل سرعة السيارة إلى قيمتها العظمى ؟
و أوجد مقدار العجلة عندئذ

الحل

∵ ع = ٤ ن − ٣ ن² ∴ ع = ن (٤ − ٣ ن)

، ببحث اشارة ع كما بالشكل التالى :

ع (ن)	+ + +	− − −
ن	٠	$\frac{٤}{٣}$

أو منحنى السرعة – الزمن

نجد : السيارة تغير حركتها بعد $\frac{٤}{٣}$ ث

ع ، ن ، ٤ ، ٠ ، ٤ ، ١٦ ، ٣٢ ، ١ ٢ ٣ ٤ — أحمد الشتنوى

∴ المسافة المقطوعة خلال [٠ ، ٤] = | $\int_{٠}^{\frac{٤}{٣}}$ ع دن | + | $\int_{\frac{٤}{٣}}^{٤}$ ع دن |

= | [٢ن² − ن³]$_{٠}^{\frac{٤}{٣}}$ | + | [٢ن² − ن³]$_{\frac{٤}{٣}}^{٤}$ |

= | $\frac{٣٢}{٢٧}$ − ٠ | + | − ٣٢ − $\frac{٣٢}{٢٧}$ | = $\frac{٩٢٨}{٢٧}$ م

∴ السرعة المتوسطة خلال [٠ ، ٤] = $\frac{٩٢٨}{٢٧}$ ÷ ٤ = $\frac{٢٣٢}{٢٧}$ م / ث

، ∵ ع = ٤ ن − ٣ ن² ∴ ف = $\int_{٠}^{٤}$ ع دن = $\int_{٠}^{٤}$ (٤ ن − ٣ ن²) دن

= [٢ن² − ن³]$_{٠}^{٤}$ = (٣٢ − ٦٤) − ٠ = − ٣٢ م

∴ متجه السرعة المتوسطة خلال [٠ ، ٤] = − $\frac{٣٢}{٤}$ ى = − ٨ ى

حيث ى متجه وحدة في اتجاه الحركة

، يكون القياس الجبرى لمتجه السرعة المتوسطة = ٨ م / ث

تصل السرعة لقيمتها العظمى أو الصغرى عندما : جـ = ٠ .

أى عندما : $\frac{دع}{دن}$ = ٠ أى عندما : ٤ − ٦ ن = ٠ أى عند : ن = $\frac{٢}{٣}$ ث

، ∵ عندما : ن < ٠ .
فإن : جـ > ٠ .
، عندما : ن > ٠ .
فإن : جـ < ٠ .

∴ توجد قيمة عظمى للسرعة ع
عند : ن = $\frac{٢}{٣}$ ث

لاحظ الشكل المقابل :
أو منحنى السرعة – الزمن
" السابق تمثيله "

ن	٠	$\frac{٢}{٣}$	∞
إشارة جـ	+ +	٠	− −
ع	تناقصية		تزايدية
		قيمة عظمى محلية	

أى تصل السرعة لقيمتها العظمى عند : ن = $\frac{٢}{٣}$ ث و عندها : جـ = ٠ .

أحمد الشتنوى

إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة ١٤٣

سيارة تتحرك فى خط مستقيم بسرعة ابتدائية ١٢ م / ث من موضع يبعد ٤ أمتار في الاتجاه الموجب من نقطة ثابتة على الخط المستقيم بحيث كانت $ح = س - ٤$ أوجد :

(أ) $ع^{٢}$ بدلالة س **(ب)** سرعة السيارة عندما $ح = ٠$.

الحل

(أ) $\because ح = ع \frac{دع}{دس}$ $\therefore \int_{٤}^{س} ح \, دس = \int_{١٢}^{ع} ع \, دع$

$\therefore \int_{٤}^{س} (س - ٤) \, دس = \int_{١٢}^{ع} ع \, دع$

$\therefore \left[\frac{١}{٢} س^{٢} - ٤ س \right]_{٤}^{س} = \left[\frac{١}{٢} ع^{٢} \right]_{١٢}^{ع}$

$\therefore \left(\frac{١}{٢} س^{٢} - ٤ س \right) - (٨ - ١٦) = \frac{١}{٢} ع^{٢} - ٧٢$

$\therefore \frac{١}{٢} س^{٢} - ٤ س + ٨٠ = \frac{١}{٢} ع^{٢}$ بالضرب × ٢ ينتج :

$ع^{٢} = س^{٢} - ٨ س + ١٦٠$

(ب) $\because ح = ٠$ عندما : $س - ٤ = ٠$ أى : $س = ٤$

$\therefore$ عند $س = ٤$: $ع^{٢} = ١٤٤$ $\therefore ع = ١٢$ م / ث

إجابة حاول أن تحل (٥) صفحة ١٤٤

جسيم يتحرك بسرعة ابتدائية مقدارها ٢ م / ث من نقطة ثابتة على الخط المستقيم بحيث كانت $ح = هـ^{س}$ أوجد $ع^{٢}$ بدلالة س
ثم أوجد ع عندما $س = ٤$ متر ، س عندما $ع = ٢٠$ م / ث

الحل

$\because ح = ع \frac{دع}{دس}$ $\therefore \int_{٠}^{س} ح \, دس = \int_{٢}^{ع} ع \, دع$

$\therefore \int_{٠}^{س} هـ^{س} \, دس = \int_{٢}^{ع} ع \, دع$ $\therefore \left[هـ^{س} \right]_{٠}^{س} = \left[\frac{١}{٢} ع^{٢} \right]_{٢}^{ع}$

$\therefore هـ^{س} - هـ^{٠} = \frac{١}{٢} ع^{٢} - ٢$ $\therefore هـ^{س} - ١ = \frac{١}{٢} ع^{٢} - ٢$

و منها : $ع^{٢} = ٢ هـ^{س} + ٢$ ، عندما : $س = ٤$

فإن : $ع^{٢} = ٢ هـ^{٤} + ٢ \simeq ١١١,٢$ $\therefore ع \simeq \pm ١٠,٥$ م / ث

و عندما : $ع = ٢٠$ م / ث $\therefore ٤٠٠ = ٢ هـ^{س} + ٢$

$\therefore هـ^{س} = ١٩٩$ $\therefore س = لو_{هـ} ١٩٩ \simeq ٥,٣$

حل تمارين (١ – ٢) صفحة ١٤٤ بالكتاب المدرسى

فى جميع المسائل اعتبر أن الجسيم يتحرك فى خط مستقيم ، س ، ع ، حـ هى القياسات الجبرية لكل من الموضع ، متجه السرعة ، العجلة على الترتيب

أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

(١) إذا كان : ع = ٣ $ن^{٢}$ – ٢ ن و كانت : س = ١ عندما ن = ٠ فإن : ....

(أ) س = ٦ ن – ٢ (ب) س = ٣ $ن^{٢}$ – ٢ ن + ١

(حـ) س = $ن^{٣}$ – $ن^{٢}$ + ١ (ء) س = $ن^{٣}$ – $ن^{٢}$ – ١

(٢) إذا كان : ع = ١ + حا ن و كانت : س = – ٣ عندما ن = ٠ فإن : ....

(أ) س = ن + حتا ن (ب) س = ن – حتا ن

(حـ) س = ن – حتا ن + ٢ (ء) س = ن – حتا ن – ٢

(٣) إذا كان : ع = ٣ ن – ٢ فإن : ف خلال [٠ ، ٢] تساوى ....

(أ) ١ وحدة طول (ب) ٢ وحدة طول

(حـ) ٣ وحدة طول (ء) ٤ وحدة طول

(٤) إذا كان : ع = ٣ $ن^{٢}$ – ٢ ن فإن :
المسافة المقطوعة خلال [٠ ، ٢] تساوى ....

(أ) $\frac{٤}{٢٧}$ وحدة طول (ب) ٤ وحدة طول

(حـ) $\frac{١١٢}{٢٧}$ وحدة طول (ء) $\frac{١١٦}{٢٧}$ وحدة طول

(٥) إذا كان : ع = ٣$ن^{٣}$ – $ن^{٢}$ + ٢ ن فإن :
المسافة المقطوعة خلال [٠ ، ٣] تساوى ....

(أ) $\frac{١}{٤}$ وحدة طول (ب) $\frac{١}{٢}$ وحدة طول

(حـ) $\frac{٩}{٤}$ وحدة طول (ء) $\frac{١١}{٤}$ وحدة طول

(٦) إذا كان : حـ = ٣ ، $ع_{٠}$ = – ١ فإن :
ف خلال [٠ ، ٢] تساوى ....

(أ) $\frac{١}{٦}$ وحدة طول (ب) ٤ وحدة طول

(حـ) $\frac{٢٥}{٦}$ وحدة طول (ء) $\frac{١٣}{٣}$ وحدة طول

(٧) إذا كان : حـ = ٣ ، $ع_{٠}$ = – ١ فإن :
المسافة المقطوعة خلال [٠ ، ٢] تساوى ....

(أ) $\frac{١}{٦}$ وحدة طول (ب) ٤ وحدة طول

(حـ) $\frac{٢٥}{٦}$ وحدة طول (ء) $\frac{١٣}{٣}$ وحدة طول

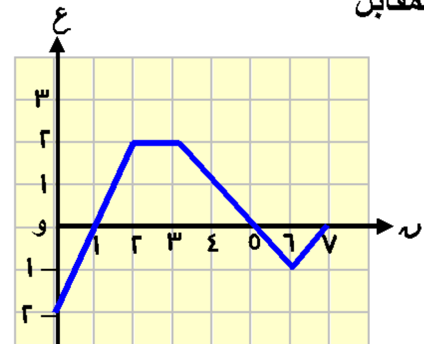
(٨) من منحنى السرعة – الزمن المقابل
فإن : مقدار الازاحة = ...

(أ) ٣ وحدة طول

(ب) ٥ وحدة طول

(حـ) ٧ وحدة طول

(ء) ٨ وحدة طول



أحمد الشتورى

(٩) من منحنى السرعة – الزمن المقابل

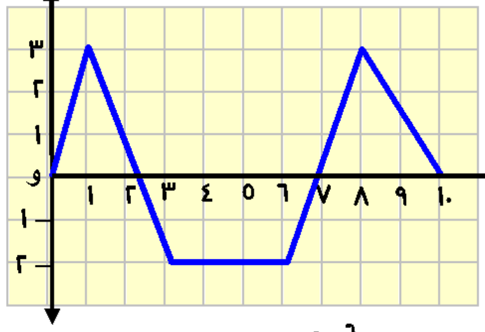
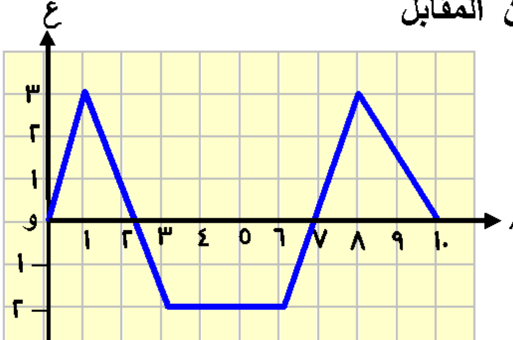
فإن : مقدار الازاحة = ...

(أ) ٤,٥ وحدة طول

(ب) ١٠,٥ وحدة طول

(جـ) ١٣,٥ وحدة طول

(د) ١٩,٥ وحدة طول

الحل

(١) ∵ ع = ٣ن² – ٢ن ∴ س = ∫ ع ءن

∴ س = ∫ (٣ن² – ٢ن) ءن = ن³ – ن + ث

عندما : ن = ٠ كانت : س = ١ فإن : ث = ١

∴ س = ن³ – ن + ١

(٢) ∵ ع = ١ + جا ن ∴ س = ∫ ع ءن

∴ س = ∫ (١ + جا ن) ءن = ن – جتا ن + ث

عندما : ن = ٠ كانت : س = – ٣ فإن : – ٣ = ٠ – جتا ٠ + ث

∴ – ٣ = ٠ – ١ + ث و منها : ث = – ٢

∴ س = ن – جتا ن – ٢

(٣) ∵ ع = ٣ن – ٢ ∴ ف = ∫ من ٠ إلى ٢ ع ءن

∴ ف = ∫ من ٠ إلى ٢ (٣ن – ٢) ءن = [٣/٢ ن² – ٢ن] من ٠ إلى ٢

= (٣/٢ × ٤ – ٢ × ٢) – ٠ = ٢ وحدة طول

حل آخر

∵ ع = ٣ن – ٢ ∴ عندما : ع = ٠

فإن : ن = ٢/٣ ث ، و عندها يغير الجسيم اتجاه حركته

يوضح ذلك بحث إشارة ع (ن) " دالة خطية " بالشكل المقابل :

ع (ن)	– – –	+ + +
ن	٠	٢/٣

أو منحنى السرعة – الزمن التالى حيث :

عندما : ن = ٠ فإن : ع = – ٢ ،

عندما : ن = ٢ فإن : ع = ٤

∴ ف = م١ – م٢ = ∫ من ٢/٣ إلى ٢ (٣ن – ٢) ءن

– ∫ من ٠ إلى ٢/٣ (٣ن – ٢) ءن

= [٣/٢ ن² – ٢ن] من ٢/٣ إلى ٢

– [٣/٢ ن² – ٢ن] من ٠ إلى ٢/٣

= [(٣/٢ × ٤ – ٢ × ٢)

– (٣/٢ × ٤/٩ – ٢ × ٢/٣)]

– [(٣/٢ × ٤/٩ – ٢ × ٢/٣) – ٠] = ٢ وحدة طول

حل ثالث

من منحنى السرعة – الزمن :

م١ = مساحة مثلث = ١/٢ × ٤/٣ × ٤ = ٨/٣ ،

م٢ = مساحة مثلث = ١/٢ × ٢/٣ × ٢ = ٢/٣

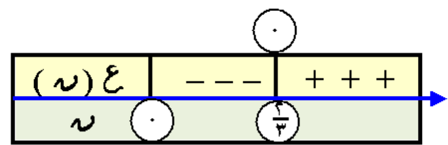
∴ ف = م١ – م٢ = ٨/٣ – ٢/٣ = ٦/٣ = ٢ وحدة طول

(٤) ∵ ع = ٣ن² – ٢ن = ن (٣ن – ٢)

∴ عندما : ع = ٠ فإن : ن = ٠ ، ن = ٢/٣ ث

الجسيم يغير اتجاه حركته عند ن = ٢/٣ ث

يوضح ذلك بحث إشارة ع (ن) " دالة تربيعية " بالشكل المقابل :
أو منحنى السرعة – الزمن التالى حيث :



عندما : ن = ٠ فإن : ع = ٠ ،
عندما : ن = ٢ فإن : ع = ٨ ،

$٣ن^{٢} - ٢ن = ٣\left(ن^{٢} - \frac{٢}{٣}ن + \frac{١}{٩} - \frac{١}{٩}\right)$

$= ٣\left(ن - \frac{١}{٣}\right)^{٢} - \frac{١}{٣}$

∴ نقطة رأس المنحنى هى : $\left(\frac{١}{٣} ، -\frac{١}{٣}\right)$

∴ المسافة المقطوعة = $\left|\int_{٠}^{\frac{٢}{٣}} (٣ن^{٢} - ٢ن)\, ءن\right| + \left|\int_{\frac{٢}{٣}}^{٢} (٣ن^{٢} - ٢ن)\, ءن\right|$

$= \left|\left[ن^{٣} - ن^{٢}\right]_{٠}^{\frac{٢}{٣}}\right| + \left|\left[ن^{٣} - ن^{٢}\right]_{\frac{٢}{٣}}^{٢}\right|$

$= \left|\left[\left(\frac{٨}{٢٧} - \frac{٤}{٩}\right) - ٠\right]\right| + \left|\left[(٨ - ٤) - \left(\frac{٨}{٢٧} - \frac{٤}{٩}\right)\right]\right|$

$= \left|-\frac{٤}{٢٧}\right| + \left|٤ + \frac{٤}{٢٧}\right| = \frac{٤}{٢٧} + \frac{١١٢}{٢٧} = \frac{١١٦}{٢٧}$ وحدة طول

(٥) ∵ $ع = ن^{٣} - ٣ن^{٢} + ٢ن$

$= ن\,(ن^{٢} - ٣ن + ٢) = ن\,(ن - ١)\,(ن - ٢)$

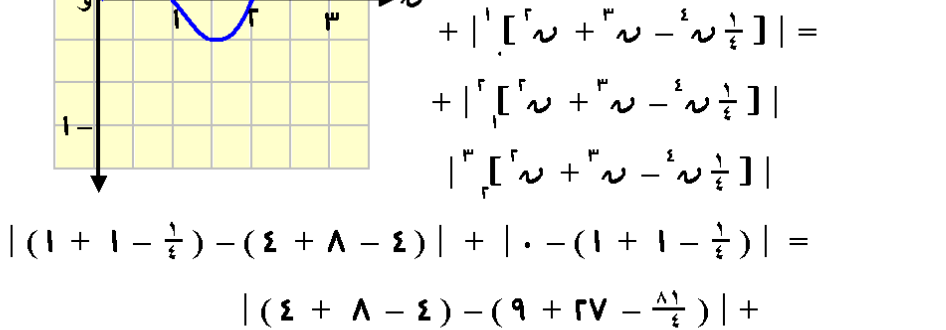
∴ عندما : ع = ٠ فإن : ن = ٠ ، ن = ١ ، ن = ٢

الجسيم يغير اتجاه حركته عند ن = ١ ث ، ن = ٢ ث يوضح ذلك بحث اشارة ع (ن) " دالة تكعيبية "

جـ (ن)	++	– –	++	++
ن	٠	١	٢	٣



أو منحنى السرعة – الزمن المقابل :



∴ المسافة المقطوعة = $\left|\int_{٠}^{١} (ن^{٣} - ٣ن^{٢} + ٢ن)\, ءن\right| +$

$\left|\int_{١}^{٢} (ن^{٣} - ٣ن^{٢} + ٢ن)\, ءن\right| +$

$\left|\int_{٢}^{٣} (ن^{٣} - ٣ن^{٢} + ٢ن)\, ءن\right|$

$= \left|\left[\frac{١}{٤}ن^{٤} - ن^{٣} + ن^{٢}\right]_{٠}^{١}\right| +$

$\left|\left[\frac{١}{٤}ن^{٤} - ن^{٣} + ن^{٢}\right]_{١}^{٢}\right| +$

$\left|\left[\frac{١}{٤}ن^{٤} - ن^{٣} + ن^{٢}\right]_{٢}^{٣}\right|$

$= \left|\left(\frac{١}{٤} - ١ + ١\right) - ٠\right| + \left|(٤ - ٨ + ٤) - \left(\frac{١}{٤} - ١ + ١\right)\right| +$

$\left|\left(\frac{٨١}{٤} - ٢٧ + ٩\right) - (٤ - ٨ + ٤)\right|$

$= \left|\frac{١}{٤}\right| + \left|-\frac{١}{٤}\right| + \left|\frac{٩}{٤}\right| = \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} + \frac{٩}{٤}$

$= \frac{١١}{٤}$ وحدة طول

(٦) ∵ جـ = ٣ " ثابتة " ∴ $ع = ع_{٠} + جـ\, ن$

، ∵ $ع_{٠} = -١$ ∴ $ع = -١ + ٣ن$

∴ ف = $\int_{٠}^{٢} (-١ + ٣ن)\, ءن = \left[-ن + \frac{٣}{٢}ن^{٢}\right]_{٠}^{٢}$

$= \left(-٢ + \frac{٣}{٢} \times ٤\right) - ٠ = -٢ + ٦ = ٤$ وحدة طول

حل آخر

∵ $ع = ٣ن - ١$ ∴ عندما : ع = ٠

فإن : $ن = \frac{١}{٣}$ ث ، و عندها يغير الجسيم اتجاه حركته

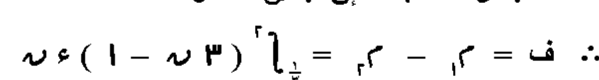
يوضح ذلك بحث إشارة ع (ن) " دالة خطية "

بالشكل المقابل :

أو منحنى السرعة – الزمن التالى حيث :

عندما : ن = ٠ فإن : ع = – ١ ،

عندما : ن = ٢ فإن : ع = ٥



∴ ف = $م_١ – م_٢ = \int_{\frac{١}{٣}}^{٢} (٣ن – ١)\,ءن – \int_{٠}^{\frac{١}{٣}} (٣ن – ١)\,ءن$

$= [\frac{٣}{٢}ن^٢ – ن]_{\frac{١}{٣}}^{٢} – [\frac{٣}{٢}ن^٢ – ن]_{٠}^{\frac{١}{٣}}$

$= [(٦ – ٢) – (\frac{١}{٦} – \frac{١}{٣})]$

$– [٠ – (\frac{١}{٦} – \frac{١}{٣})] = ٤$ وحدة طول

حل ثالث

من منحنى السرعة – الزمن :

$م_١$ = مساحة مثلث = $\frac{١}{٢} × \frac{٥}{٣} × ٥ = \frac{٢٥}{٦}$ ،

$م_٢$ = مساحة مثلث = $\frac{١}{٢} × \frac{١}{٣} × ١ = \frac{١}{٦}$

∴ ف = $م_١ – م_٢ = \frac{٢٥}{٦} – \frac{١}{٦} = \frac{٢٤}{٦} = ٤$ وحدة طول

(٧) من (٦) يكون :

المسافة المقطوعة = $|\int_{\frac{١}{٣}}^{٢} (٣ن – ١)\,ءن| + |\int_{٠}^{\frac{١}{٣}} (٣ن – ١)\,ءن|$

$= |[(٦ – ٢) – (\frac{١}{٦} – \frac{١}{٣})]| + |[٠ – (\frac{١}{٦} – \frac{١}{٣})]|$

$= |\frac{٢٥}{٦}| + |\frac{١}{٦}| = \frac{٢٥}{٦} + \frac{١}{٦} = \frac{٢٦}{٦} = \frac{١٣}{٣}$ وحدة طول

(٨) مقدار الازاحة = مساحة شبه منحرف – مساحة مثلث – مساحة مثلث

$= \frac{١}{٢} × (٤ + ١) × ٢ – \frac{١}{٢} × ١ × ٢ – \frac{١}{٢} × ٢ × ١$

= ٥ – ١ – ١ = ٣ وحدة طول

(٩) المسافة المقطوعة = |مساحة مثلث| + |مساحة شبه منحرف| + |مساحة مثلث|

$= |\frac{١}{٢} × ٢ × ٣| + |\frac{١}{٢} × (٣ + ٢) × ٢| + |\frac{١}{٢} × ٣ × ٣|$

$= ٣ + ١٢ + \frac{٩}{٢} = \frac{٣٩}{٢}$ وحدة طول

(١٠) قذف جسيم رأسياً لأعلى بسرعة ابتدائية قدرها ٥,٦ م / ث من نقطة على ارتفاع ٢٤,٥ م من سطح الأرض ، أوجد كل من ع ، س بدلالة ن ثم أوجد أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم عن سطح الأرض

الحل

∵ الجسيم يتحرك رأسياً لأعلى بعجلة ثابتة " فى عكس اتجاه الجاذبية الأرضية "

∴ ع = ٥,٦ – ٩,٨ ن ، ∵ $س – س_٠ = \int_{٠}^{ن} (ع_٠ + جـ ن)\,ءن$

∴ $س – ٢٤,٥ = \int_{٠}^{ن} (٥,٦ – ٩,٨ ن)\,ءن$

∴ $س = ٢٤,٥ + ٥,٦ ن – ٩,٨ ن^٢$

عند أقصى ارتفاع يكون : ع = ٠ ∴ ٥,٦ – ٩,٨ ن = ٠

و منها : ن = $\frac{٥٦}{٩٨} = \frac{٤}{٧}$ ث

∴ $س = ٢٤,٥ + ٥,٦ × \frac{٤}{٧} – ٩,٨ × \frac{١٦}{٤٩} = ١٦,١$ م

(١١) جسيم يتحرك فى خط مستقيم بسرعة ابتدائية ٢ م / ث من نقطة ثابتة بحيث كان : جـ = ٢ ن – ٦ ، جـ مقاسة بوحدة م / $ث^٢$ ، أوجد بدلالة ن كل من ع ، س ثم أوجد س عندما : ع = ١٨ م / ث

الحل

∵ الجسيم يتحرك بعجلة : حـ = ٢ ن – ٦ ، ع. = ٢ م / ث

∴ ع – ع. = ∫ (٢ ن – ٦) ء ن

∴ ع – ٢ = ن² – ٦ ن   ∴ ع = ن² – ٦ ن + ٢

، ∵ الجسيم يتحرك من نقطة ثابتة ∴ س = ∫ (ن² – ٦ ن + ٢) ء ن

∴ س = $\frac{١}{٣}$ ن³ – ٣ ن² + ٢ ن ، عندما : ع = ١٨ م / ث

∴ ن² – ٦ ن + ٢ = ١٨   ∴ ن² – ٦ ن – ١٦ = ٠

∴ (ن – ٨) (ن + ٢) = ٠ و منها : ن = ٨ أ، ن = – ٢ مرفوض

∴ س (٨) = $\frac{١}{٣}$ × (٨)³ – ٣ × (٨)² + ٢ × ٨ = – $\frac{١٦}{٣}$ م

(١٢) جسيم يتحرك فى خط مستقيم من نقطة ثابتة مبتدأ من السكون بحيث كان : حـ = ٨ – ٢ ن² ، حـ مقاسة بوحدة م / ث² ، أوجد أقصى سرعة للجسيم و زمن الوصول لأقصى سرعة و المسافة المقطوعة حتى هذا الزمن

الحل

∵ حـ = ٨ – ٢ ن²   ∴ ع = ∫ (٨ – ٢ ن²) ء ن

∴ ع = ٨ ن – $\frac{٢}{٣}$ ن³ + ث ، عندما : ن = ٠ فإن : ع = ٠

∴ ث = ٠   ∴ ع = ٨ ن – $\frac{٢}{٣}$ ن³

عند أقصى سرعة للجسيم (أى الجسيم يتحركة بسرعة منتظمة)

∴ حـ = ٠   أى أن : ٨ – ٢ ن² = ٠   ∴ ٢ ن² = ٨

و منها : ن = ٢   أو   ن = – ٢ مرفوض

∴ زمن الوصول أقصى سرعة هو : ٢ ث

، أقصى سرعة هى : ع(٢) = ٨ × ٢ – $\frac{٢}{٣}$ × ٨ = $\frac{٣٢}{٣}$ م / ث

، ∵ س – س. = ∫ ع ء ن ، الجسيم يتحرك من السكون

∴ س – ٠ = ∫ (٨ ن – $\frac{٢}{٣}$ ن³) ء ن

∴ س = ٤ ن² – $\frac{١}{٦}$ ن³ ، س (٢) = ٤ × ٤ – $\frac{١}{٦}$ × ١٦ = $\frac{٤٠}{٣}$ م

(١٣) جسيم يتحرك فى خط مستقيم من نقطة ثابتة مبتدأ من السكون بحيث كان : حـ = $\frac{٣}{٨}$ س² ، حـ مقاسة بوحدة م / ث² ، س بالمتر ، أوجد سرعة الجسيم عندما يكون : س = ٢ م ، ثم أوجد موضعه عندما تكون : ع = ٨ م / ث

الحل

∵ الجسيم يتحرك من نقطة ثابتة مبتدأ من السكون

∴ $\frac{١}{٢}$ (ع² – ع.²) = ∫ $\frac{٣}{٨}$ س² ء س

∴ $\frac{١}{٢}$ (ع² – ٠) = $\frac{١}{٨}$ س²   و منها : ع² = $\frac{١}{٤}$ س³

و عندما : س = ٢ م   فإن : ع² = $\frac{١}{٤}$ × ٨ = ٢

∴ ع = ± √٢ م / ث   و عندما : ع = ٨ م / ث

فإن : ٦٤ = $\frac{١}{٤}$ س³   و منها : س = ٢ ∛٤ م

(١٤) جسيم يتحرك فى خط مستقيم بسرعة ابتدائية ٣ م / ث من نقطة ثابتة بحيث كان : حـ = ٦ س + ٤ ، حـ مقاسة بوحدة م / ث² ، س بالمتر ، أوجد ع² بدلالة س ، أوجد سرعة الجسيم عندما س = ٢ ثم أوجد س عندما : ع² = ٨٧

الحل

∵ الجسيم يتحرك من نقطة ثابتة بسرعة ابتدائية ٣ م / ث

∴ $\frac{1}{2}$ (ع^{2} − ع.^{2}) = ∫ (٦ س + ٤) ء س

∴ $\frac{1}{2}$ (ع^{2} − ٩) = ٣ س^{2} + ٤ س

و منها : ع^{2} = ٦ س^{2} + ٨ س + ٩

و عندما : س = ٢ م فإن : ع^{2} = ٢٤ × ٦ + ٩ = ٤٩

∴ ع = ± $\sqrt{7}$ م / ث

و عندما : ع^{2} = ٨٧ م / ث

∴ ٨٧ = ٦ س^{2} + ٨ س + ٩

∴ ٦ س^{2} + ٨ س − ٧٨ = ٠

∴ ٣ س^{2} + ٤ س − ٣٩ = ٠

∴ (س − ٣) (٣ س + ١٣) = ٠

و منها : س = ٣ أ؛ س = − $\frac{13}{3}$

حل تمارين عامة صفحة ١٤٦ بالكتاب المدرسى

أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

(١) إذا كان : س = ن^{2} − ٣ ن + ٢ فإن الجسيم يغير اتجاه حركته عندما : ....

(أ) ن = ١ ، ن = ٣ (ب) ن = ١

(جـ) ن = ١,٥ (ء) ن = ٣

الحل

∵ س = ن^{2} − ٣ ن + ٢ ∴ ع = $\frac{ءس}{ءن}$ = ٢ ن − ٣

، ∵ الجسيم يغير اتجاه حركته عندما : ع = ٠ أى عندما : ٢ ن − ٣ = ٠

∴ الجسيم يغير اتجاه حركته عندما : ن = ١,٥

(٢) إذا كان : س = ٦ ن − ن^{2} فإن : المسافة المقطوعة خلال الفترة الزمنية : ٠ ≤ ن ≤ ٦ تكون : ....

(أ) صفر (ب) ٩ (جـ) ١٨ (ء) ٣٦

الحل

∵ س = ٦ ن − ن^{2}

∴ ع = $\frac{ءس}{ءن}$ = ٦ − ٢ ن

ع = ٠ عندما : ن = ٣

، ∵ ف = س − س. ، س. = ٠

∴ ف = ٦ ن − ن^{2}

∴ المسافة المقطوعة خلال : ٠ ≤ ن ≤ ٦

= | ف (٣) − ف (٠) |

+ | ف (٦) − ف (٣) |

= | [(١٨ − ٩) − ٠] | + | [(٣٦ − ٣٦) − (١٨ − ٩)] |

= | ٩ | + | −٩ | = | ٩ | + | ٩ | = ١٨

(٣) إذا كان : ع (ن) = ٩,٨ ن + ٥ حيث : س (٠) = ١٠ فإن : س (١٠) = ...

(أ) صفر (ب) ٥٣٠ (جـ) ٥٤٠ (ء) ٥٥٠

الحل

∵ س = ∫ ع ء ن = ∫ (٩,٨ ن + ٥) ء ن = ٤,٩ ن^{2} + ٥ ن + ث

، ∵ س = ١٠ عندما : ن = ٠ ∴ ث = ١٠

∴ س = ٤,٩ ن^{2} + ٥ ن + ١٠

، س (١٠) = ٤,٩ × ١٠٠ + ٥ × ١٠ + ١٠ = ٥٥٠

(٤) إذا كان : ع (ن) = $\frac{٢}{\pi}$ حتا $\left(\frac{٢ن}{\pi}\right)$ ، كانت : س ($\pi^{٢}$) = ١

فإن : س (ن) = ...

(أ) $\frac{٢}{\pi}$ حا $\left(\frac{٢ن}{\pi}\right)$ + ١   (ب) $\frac{٢}{\pi}$ حا $\left(\frac{٢ن}{\pi}\right)$ − ١

(جـ) حا $\left(\frac{٢ن}{\pi}\right)$ + ١   (د) حا $\left(\frac{٢ن}{\pi}\right)$ − ١

الحل

∵ س = ∫ ع ء ن = ∫ $\frac{٢}{\pi}$ حتا $\left(\frac{٢ن}{\pi}\right)$ ء ن

= $\frac{٢}{\pi}$ × $\frac{\pi}{٢}$ حا $\left(\frac{٢ن}{\pi}\right)$ + ث = حا $\left(\frac{٢ن}{\pi}\right)$ + ث

، ∵ س = ١ عندما : ن = $\pi^{٢}$ ∴ ١ = حا ٢π + ث

و منها : ث = ١   ∴ س = حا $\left(\frac{٢ن}{\pi}\right)$ + ١

(٥) إذا كان : جـ (ن) = − ٤ حا ٢ن ، و كان : ع (٠) = ٢

، س (٠) = − ٣ فإن : س (π) = ...

(أ) − ٣   (ب) ٠   (جـ) ٢   (د) ٣

الحل

∵ جـ (ن) = − ٤ حا ٢ن   ∴ ع = ∫ − ٤ حا ٢ن ء ن

∴ ع = − ٤ × − $\frac{١}{٢}$ حتا ٢ن + ث = ٢ حتا ٢ن + ث

، ∵ ع (٠) = ٢   ∴ ٢ = ٢ حتا ٠ + ث   ∴ ٢ = ٢ × ٠ + ث

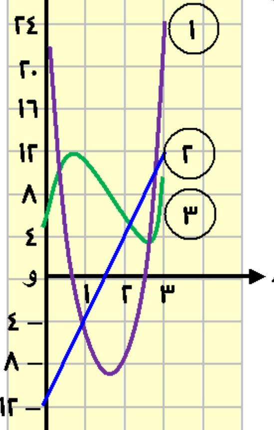
∴ ث = ٠   ∴ ع = ٢ حتا ٢ن

، س = ∫ ٢ حتا ٢ن ء ن = ٢ × $\frac{١}{٢}$ حا ٢ن + ث′ = حا ٢ن + ث′

، ∵ س (٠) = − ٣   ∴ − ٣ = حا ٠ + ث′ و منها : ث′ = − ٣

∴ س = حا ٢ن − ٣ ، س (π) = حا ٢π − ٣ = − ٣

(٦) المنحنى المرسوم بالشكل المقابل يمثل موضع جسيم و متجه سرعته و عجلة الحركة فأى الاختيارات تلآتية تمثل على الترتيب منحنيات الموضع – الزمن ، السرعة – الزمن ، العجلة – الزمن



(أ) ٣ ، ٢ ، ١

(ب) ١ ، ٣ ، ٢

(جـ) ٣ ، ١ ، ٢

(د) ١ ، ٢ ، ٣

الحل

بملاحظة الشكل المقابل نجد : بالنسبة للمنحنى (٣) :

عند ن = ١ توجد قيمة عظمى ، عند ن = ٣ توجد قيمة صغرى

بالنسبة للمنحنى (١) عند ن = ٢ توجد قيمة صغرى

بالنسبة للمنحنى (٢) : لا توجد قيم عظمى أو صغرى

∴ درجة دالة المنحنى (٣) = درجة دالة المنحنى (١) + ١ ،

درجة دالة المنحنى (١) = درجة دالة المنحنى (٢) + ١

∴ المنحنى (٣) يمثل منحنى الموضع – الزمن ،

المنحنى (١) يمثل منحنى السرعة – الزمن ،

المنحنى (٢) يمثل منحنى العجلة – الزمن

و بطريقة أخرى :

بالنسبة للمنحنى (٣) :

فى] ٠ ، ٠,٨ [،] ٢,٢ ، ٤ [: المنحنى متزايد ، و ميل المماس موجب

∴ مشتقة دالته تقع أعلى محور ن فى هاتين الفترتين

عند ن = ٠,٨ ، ن = ٢,٢ : المماس أفقى

∴ قيمة مشتقة دالته عند هاتين النقطتين = ٠

فى] ٠,٨ ، ٢,٢ [: المنحنى متناقص ، و ميل المماس سالب

∴ مشتقة دالته تقع أسفل محور ن فى هذه الفترة و المنحنى (١) يحقق ذلك

∴ درجة دالة المنحنى (٣) = درجة دالة المنحنى (١) + ١

بالنسبة للمنحنى (١) :

فى] ٠ ، ١,٥ [: المنحنى متناقص ، و ميل المماس سالب

∴ مشتقة دالته تقع أسفل محور ن فى هذه الفترة

عند ن = ١,٥ : المماس أفقى ∴ قيمة مشتقة دالته عند هذه النقطة = ٠

فى] ١,٥ ، ٣ [: المنحنى متزايد ، و ميل المماس موجب

∴ مشتقة دالته تقع أعلى محور ن فى هذه الفترة و المنحنى (٢) يحقق ذلك

∴ درجة دالة المنحنى (١) = درجة دالة المنحنى (٢) + ١

مما سبق يتضح : المنحنى (٣) يمثل منحنى الموضع – الزمن ،

المنحنى (١) يمثل منحنى السرعة – الزمن ،

المنحنى (٢) يمثل منحنى العجلة – الزمن

(٧) المنحنى المرسوم بالشكل المقابل يمثل موضع جسيم و متجه سرعته و عجلة الحركة فأى الاختيارات الآتية تمثل على الترتيب منحنيات الموضع – الزمن ، السرعة – الزمن ، العجلة – الزمن

(أ) ٣ ، ٢ ، ١

(ب) ١ ، ٢ ، ٣

(جـ) ٢ ، ٣ ، ١

(د) ٣ ، ١ ، ٢

الحل

بالنسبة للمنحنى (٣) :

عند ن = ٠ ، ن = ٣ : المماس أفقى

∴ قيمة مشتقة دالته عند هاتين النقطتين = ٠

فى] ٠ ، ٣ [: المنحنى متناقص ، و ميل المماس سالب

∴ مشتقة دالته تقع أسفل محور ن فى هذه الفترة و المنحنى (٢) يحقق ذلك

∴ درجة دالة المنحنى (٣) = درجة دالة المنحنى (٢) + ١

بالنسبة للمنحنى (٢) :

فى] ٠ ، ١,٥ [: المنحنى متناقص ، و ميل المماس سالب

∴ مشتقة دالته تقع أسفل محور ن فى هذه الفترة

عند ن = ١,٥ : المماس أفقى

∴ قيمة مشتقة دالته عند هذه النقطة = ٠

فى] ١,٥ ، ٣ [: المنحنى متزايد ، و ميل المماس موجب

∴ مشتقة دالته تقع أعلى محور ن فى هذه الفترة و المنحنى (١) يحقق ذلك

∴ درجة دالة المنحنى (٢) = درجة دالة المنحنى (١) + ١

مما سبق يتضح :

المنحنى (٣) يمثل منحنى الموضع – الزمن ،

المنحنى (٢) يمثل منحنى السرعة – الزمن ،

المنحنى (١) يمثل منحنى العجلة – الزمن

(٨) جسيم يتحرك فى خط مستقيم طبقاً للعلاقة : س = ٤ حتا ن

حيث : س بوحدة سنتيمتر ، ن بالثانية ، أوجد :

(أ) ع عندما : ن = $\frac{1}{2}\pi$　(ب) جـ عندما : ن = π

الحل

∵ س = ٤ حتا ن　　∴ ع = $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = – ٤ حا ن

∴ ع ($\frac{١}{٢}$ π) = − ٤ حا ($\frac{١}{٢}$ π) = − ٤ × ١ = − ٤ سم / ث

، حـ = $\frac{ءع}{ءن}$ = − ٤ حتا ن

، حـ (π) = − ٤ حتا π = − ٤ × − ١ = ٤ سم / ث^{٢}

(٩) جسيم يتحرك فى خط مستقيم من نقطة ثابتة على الخط المستقيم طبقاً للعلاقة : ع = حا ن − حتا ن أوجد : س ($\frac{١}{٢}$ π)

الحل

∵ ع = حا ن − حتا ن ، و الجسيم يتحرك من نقطة ثابتة

∴ س = $\int_{٠}^{ن}$ (حا ن − حتا ن) ءن = [− حتا ن − حا ن]$_{٠}^{ن}$

∴ س = (− حتا ن − حا ن) − (− حتا ٠ − حا ٠)

= (− حتا ن − حا ن) − (− ١ − ٠)

= − حتا ن − حا ن + ١

∴ س ($\frac{١}{٢}$ π) = − حتا ($\frac{١}{٢}$ π) − حا ($\frac{١}{٢}$ π) + ١

= − ٠ − ١ + ١ = صفر

(١٠) جسيم يتحرك فى خط مستقيم بحيث كان القياس الجبرى لازاحته يعطى كدالة فى الزمن ن بالعلاقة : ف = ن^{٣} − ٦ ن^{٢} + ٩ ن
حيث ف مقاسة بالمتر ، ن بالثانية

(أ) أوجد عجلة الحركة عند لحظات انعدام السرعة

(ب) أوجد سرعة الجسيم عندما تكون : حـ = ٠ .

(حـ) حدد متى تتزايد سرعة الجسيم و متى تتناقص ؟

(ء) أوجد المسافة المقطوعة خلال الخمس ثوان الأولى

الحل

∵ ف = ن^{٣} − ٦ ن^{٢} + ٩ ن

∴ ع = $\frac{ءف}{ءن}$ = ٣ ن^{٢} − ١٢ ن + ٩

∴ ع = ٣ (ن^{٢} − ٤ ن + ٣) = ٣ (ن − ٣) (ن − ١)

، حـ = $\frac{ءع}{ءن}$ = ٦ ن − ١٢

، ع = ٠ عندما : ٣ (ن − ٣) (ن − ١) = ٠

أى عندما : ن = ٣ ، ن = ١

(أ) حـ (٣) = ٦ × ٣ − ١٢ = ٦ م / ث^{٢} ،

حـ (١) = ٦ × ١ − ١٢ = − ٦ م / ث^{٢}

(ب) عندما : حـ = ٠ فإن : ٦ ن − ١٢ = ٠ و منها : ن = ٢

∴ ع (٢) = ٣ × ٤ − ١٢ × ٢ + ٩ = − ٣ م / ث^{٢}

(حـ) ∵ حـ دالة خطية

∴ بدراسة إشارة حـ كما بالشكل المقابل

+ + +	− − −	حـ (ن)
	٢	٠ ن

نجد :

تتزايد السرعة فى :] ٢ ، ∞ [

، و تتناقص فى :] ٠ ، ٢ [

(ء) المسافة المقطوعة خلال الخمس ثوان الأولى = | ف (١) − ف (٠) |

+ | ف (٣) − ف (١) | + | ف (٥) − ف (٣) |

= | [(١ − ٦ + ٩) − ٠] | + | [(٢٧ − ٥٤ + ٢٧) −

(١ − ٦ + ٩)] | + | [(١٢٥ − ١٥٠ + ٤٥) − (٢٧ − ٥٤ + ٢٧)] |

= | ٤ | + | − ٤ | + | ٢٠ | = ٢٨ م

(١١) جسيم يتحرك فى خط مستقيم طبقاً للعلاقة : حـ(ن) = − ٢ بسرعة ابتدائية قدرها ٣ م / ث من نقطة ثابتة على الخط المستقيم أوجد كلاً من الازاحة و المسافة المقطوعة خلال الفترة الزمنية [١ ، ٤]

الحل

∵ حـ(ن) = − ٢ ثابتة ، ع. = ٣ م / ث

∴ ع = ع. + حـ ن = ٣ − ٢ ن ، ∵ الجسيم يتحرك من نقطة ثابتة

∴ ف = ∫ (٣ − ٢ ن) ءن = ٣ ن − ن^{2} + ث

و عندما : ن = ٠ فإن : ف = ٠ ∴ ث = ٠ ∴ ف = ٣ ن − ن^{2}

، ف(٤) = ١٢ − ١٦ = − ٤ ، ف(١) = ٣ − ١ = ٢

∴ ف$_{[١ ، ٤]}$ = ف(٤) − ف(١) = − ٤ − ٢ = − ٦ م

حل آخر لإيجاد ف :

ف = $\int_{1}^{4}$ (٣ − ٢ ن) ءن = [٣ ن − ن^{2}]$_{1}^{4}$

= (١٢ − ١٦) − (٣ − ١) = − ٦ م

، ع = ٠ عندما : ٣ − ٢ ن = ٠ أى عندما : ن = $\frac{٣}{٢}$

المسافة المقطوعة = | ف ($\frac{٣}{٢}$) − ف (١) | + | ف (٤) − ف ($\frac{٣}{٢}$) |

= | [($\frac{٩}{٢}$ − $\frac{٩}{٤}$) − (٣ − ١)] | +

| [(١٢ − ١٦) − ($\frac{٩}{٢}$ − $\frac{٩}{٤}$)] |

= | $\frac{١}{٤}$ | + | − $\frac{٢٥}{٤}$ | = $\frac{٢٦}{٤}$ = $\frac{١٣}{٢}$ م

(١٢) جسيم يتحرك فى خط مستقيم طبقاً للعلاقة : ف = ن^{3} − ٣ ن^{2} حيث ف مقاسة بالمتر ، ن بالثانية أوجد كلاً من :

(أ) عجلة الحركة عندما تنعدم السرعة

(ب) سرعته المتوسطة ، متجه السرعة المتوسطة خلال الفترة الزمنية [٠ ، ٥]

الحل

∵ ف = ن^{3} − ٣ ن^{2} ∴ ع = ٣ ن^{2} − ٦ ن ، حـ = ٦ ن − ٦

(أ) ∵ ع = ٠ عندما : ٣ ن (ن − ٢) = ٠ أى عندما : ن = ٠ ، ن = ٢

∴ حـ(٠) = ٠ − ٦ = − ٦ م / ث^{2} ، حـ(٢) = ١٢ − ٦ = ٦ م / ث^{2}

(ب) ∵ ع = ٠ عندما : ن = ٠ ، ن = ٢

∴ المسافة المقطوعة خلال [٠ ، ٥] =

| ف(٢) − ف(٠) | + | ف(٥) − ف(٢) |

= | [(٨ − ١٢) − ٠] | + | [(١٢٥ − ٧٥) − (٨ − ١٢)] |

= | − ٤ | + | ٥٤ | = ٥٨ م

∴ السرعة المتوسطة = $\frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلى}}$ = $\frac{٥٨}{٥}$ = ١١,٦ م / ث

، الازاحة الكلية = ف(٥) − ف(٠) = (١٢٥ − ٧٥) − ٠ = ٥٠

∴ متجه السرعة المتوسطة = $\frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلى}}$ $\overrightarrow{ى}$ = $\frac{٥٠}{٥}$ $\overrightarrow{ى}$ = ١٠ $\overrightarrow{ى}$

(١٣) جسيم يتحرك فى خط مستقيم طبقاً للعلاقة : − ٢ م / ث ، و من موضع يبعد ٣ أمتار فى الاتجاه الموجب من نقطة ثابتة على الخط المستقيم بحيث كان : حـ = ٢ ن + ١ فأوجد س عند لحظات انعدام السرعة

الحل

$\because$ الجسيم يتحرك بعجلة : $\text{حـ} = ٢\text{ن} + ١$ ، $\text{ع}_0 = -٢ \text{ م/ث}$

$\therefore \text{ع} - \text{ع}_0 = \int_0^{\text{ن}} (٢\text{ن} + ١)\, \text{ء}\text{ن}$

$\therefore \text{ع} + ٢ = \text{ن}^٢ + \text{ن} \quad \therefore \text{ع} = \text{ن}^٢ + \text{ن} - ٢$ ،

$\text{س} - \text{س}_0 = \int_0^{\text{ن}} (\text{ن}^٢ + \text{ن} - ٢)\, \text{ء}\text{ن}$

$\therefore \text{س} - ٣ = \frac{١}{٣}\text{ن}^٣ + \frac{١}{٢}\text{ن}^٢ - ٢\text{ن}$

$\therefore \text{س} = \frac{١}{٣}\text{ن}^٣ + \frac{١}{٢}\text{ن}^٢ - ٢\text{ن} + ٣$

، $\because \text{ع} = ٠$ عندما : $\text{ن}^٢ + \text{ن} - ٢ = ٠ \quad \therefore (\text{ن} - ١)(\text{ن} + ٢) = ٠$

$\therefore \text{ن} = ١$ ، $\text{ن} = -٢$ مرفوض

$\therefore \text{س}(١) = \frac{١}{٣} + \frac{١}{٢} - ٢ + ٣ = \frac{١١}{٦} \text{ م}$

(١٤) ٩ ، ب نقطتان على خط مستقيم واحد تحرك جسيم من السكون مبتدأ من النقطة ٩ فى $\overleftarrow{\text{٩ب}}$ بحيث كان القياس الجبرى لسرعته يعطى بالعلاقة : $\text{ع} = ٠,٤\text{ن} + ٠,٩\text{ن}^٢$ حيث : ع مقاسة بوحدة م / ث ، ن بالثانية ، و بعد ثانيتين من تحرك الجسيم الأول تحرك جسيم آخر مبتدأ من النقطة ب فى اتجاه $\overleftarrow{\text{ب٩}}$ من السكون بعجلة ثابتة قدرها ٠,٢ م / ث^٢ فتقابل الجسيمان بعد ٥ ثوان من من تحرك الجسيم الأول فأوجد البعد بين ٩ ، ب

الحل

بفرض أن : الجسمين يلتقيان عند نقطة هـ

حيث : $\text{٩هـ} = \text{س}_١$ ، $\text{ب هـ} = \text{س}_٢$

بعد مرور ٥ ثوان من تحرك الجسيم الأول ، مرور ٣ ثوان من تحرك الجسيم الثانى

بالنسبة للجسيم الأول :

$\because \text{ع} = ٠,٤\text{ن} + ٠,٩\text{ن}^٢$

$\therefore \text{س}_١ = \int_0^{٥} (٠,٤\text{ن} + ٠,٩\text{ن}^٢)\, \text{ء}\text{ن}$

$= [٠,٢\text{ن}^٢ + ٠,٣\text{ن}^٣]_0^{٥}$

$= (٠,٢ \times ٢٥ + ٠,٣ \times ١٢٥) - ٠$

$= ٤٢,٥ \text{ م}$

، بالنسبة للجسيم الثانى :

$\because$ الجسيم يتحرك بعجلة ثابتة حيث : $\text{حـ} = ٠,٢$ من السكون

، $\because \text{ف} = \text{ع}_0\text{ن} + \frac{١}{٢}\text{حـ}\text{ن}^٢$

$\therefore \text{س}_٢ = ٠ + \frac{١}{٢} \times ٠,٢ \times ٩ = ٠,٩ \text{ م}$

$= (٠,١ \times ٩) - ٠ = ٠,٩ \text{ م}$

$\therefore \text{٩ب} = ٤٢,٥ + ٠,٩ = ٤٣,٤ \text{ م}$





أحمد الشنتورى